

# La costante di Planck

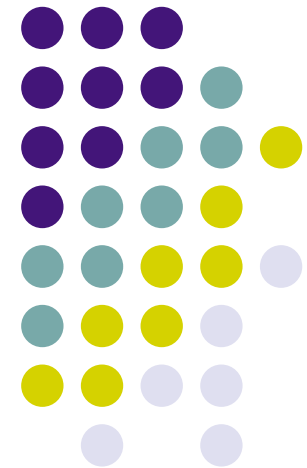
---



**Matteo Mascolo**

Rosario Lenci

Giuseppe Papalino



# Sommario



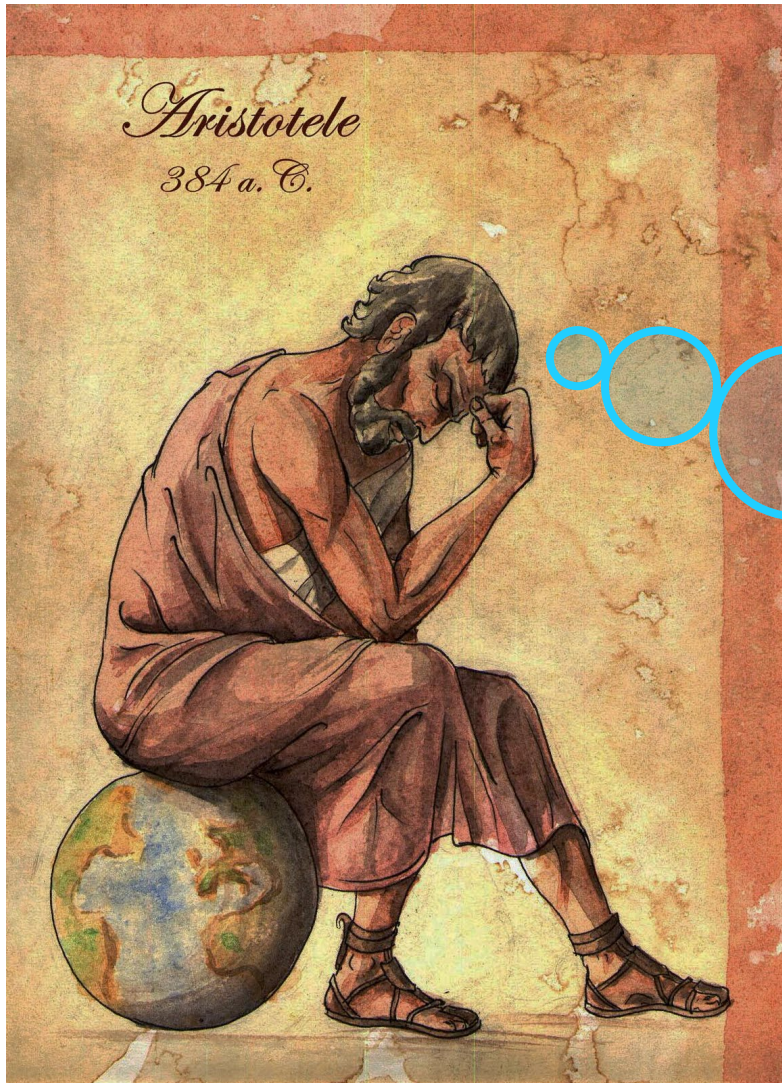
## Parte I

- Introduzione
- Il problema del “corpo nero”
- La costante di Planck e la nascita della meccanica quantistica

## Parte II

- Il diodo LED
- La nostra misura

# La fisica prima di Galileo

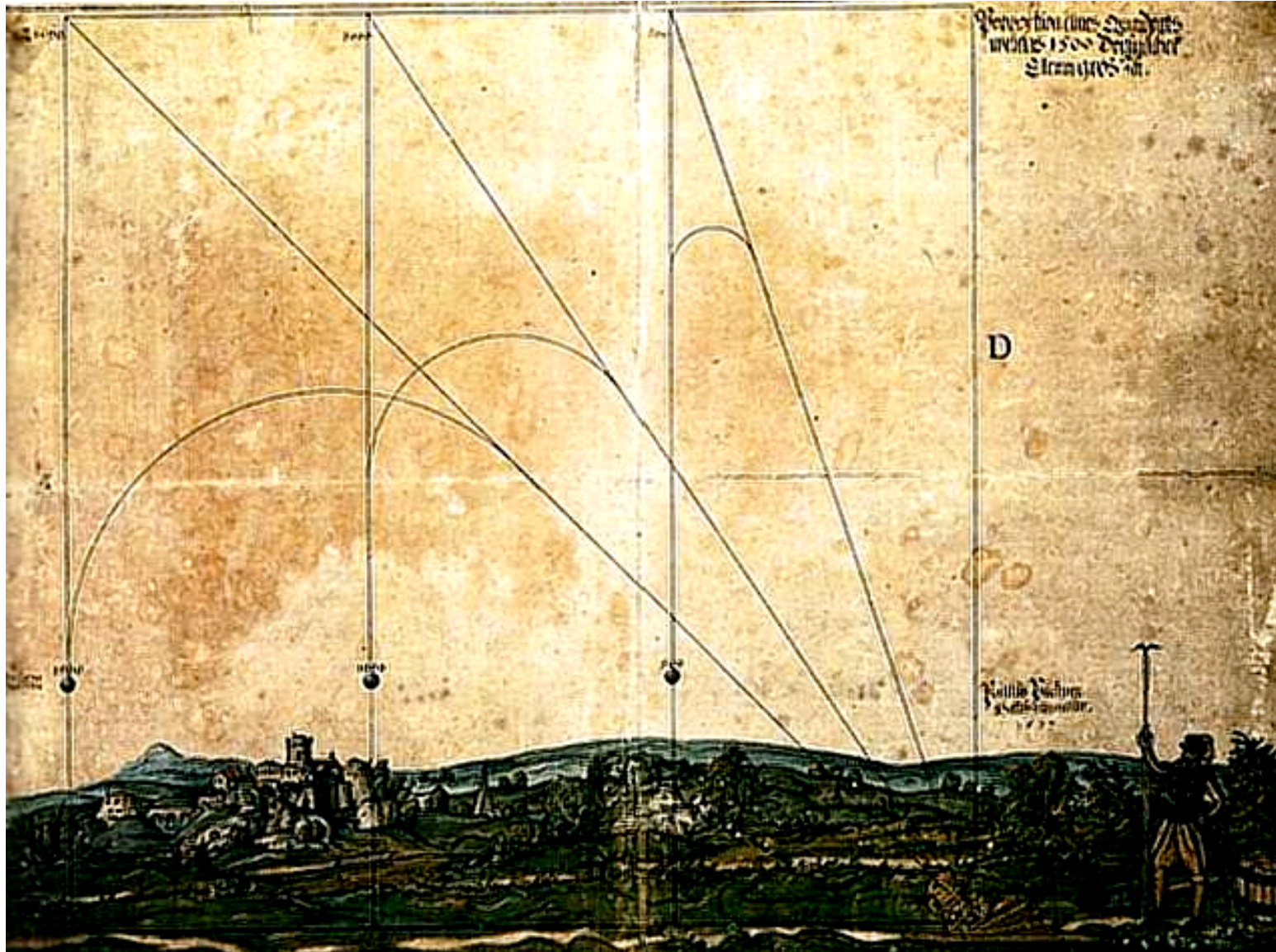


Per mantenere un corpo in movimento c'è bisogno di una forza costante...

$$F = mv$$

La velocità dei corpi nel vuoto è infinita.

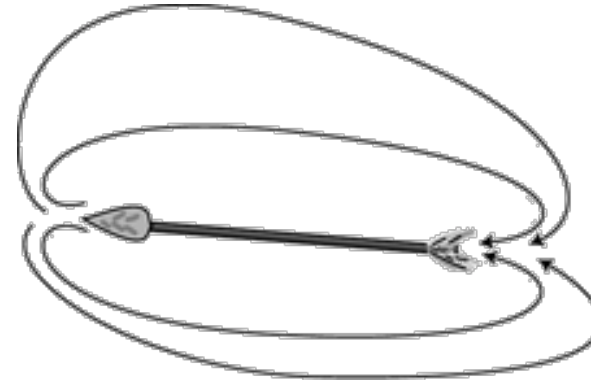
# Le traiettorie secondo Aristotele



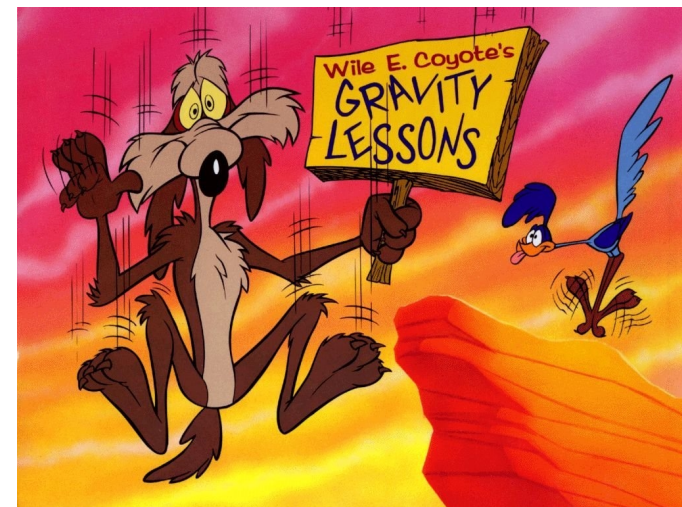
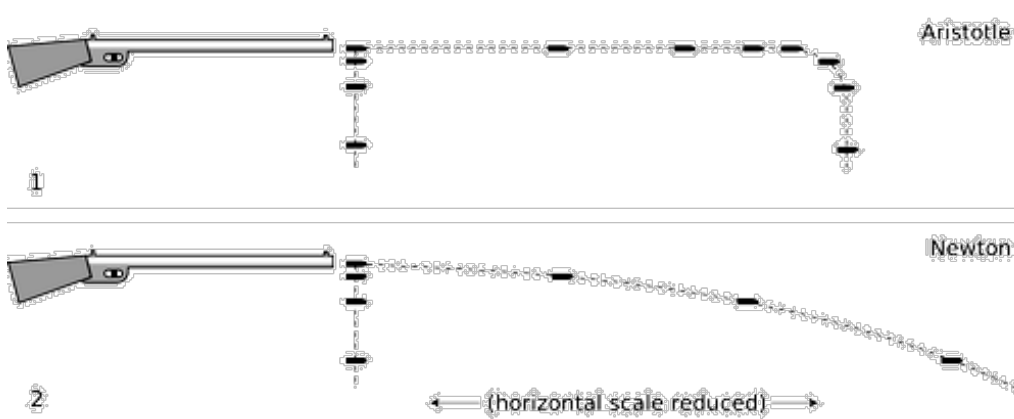
# Che problemi ha la meccanica Aristotelica?



1. Spiegare perché una freccia continua a muoversi una volta scoccata (“**horror vacui**”)



2. Le “traiettorie aristoteliche” possono essere smentite da un banale esperimento

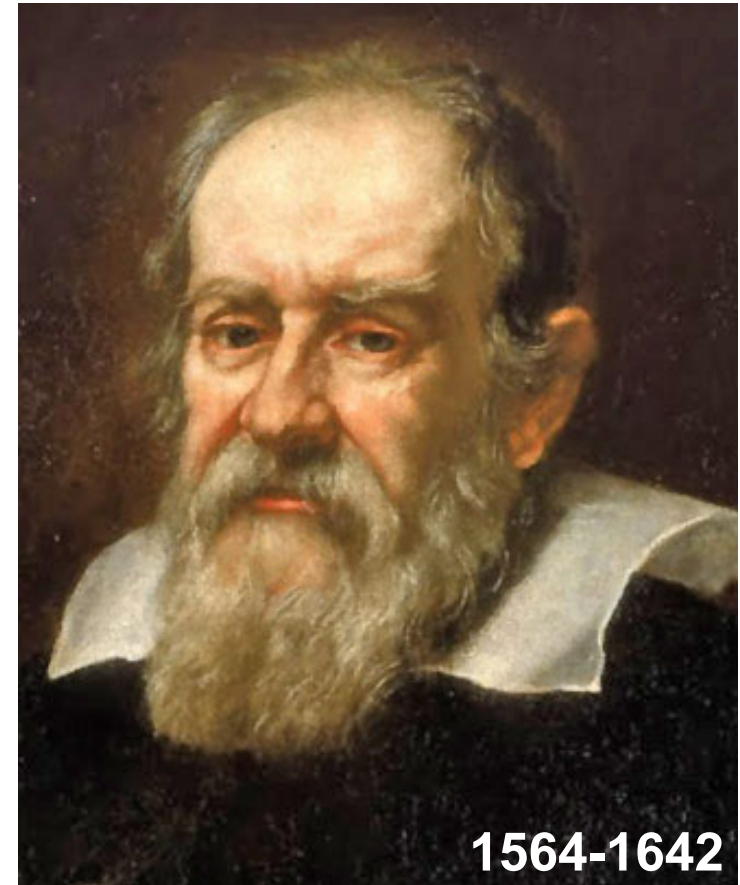


# Il metodo scientifico



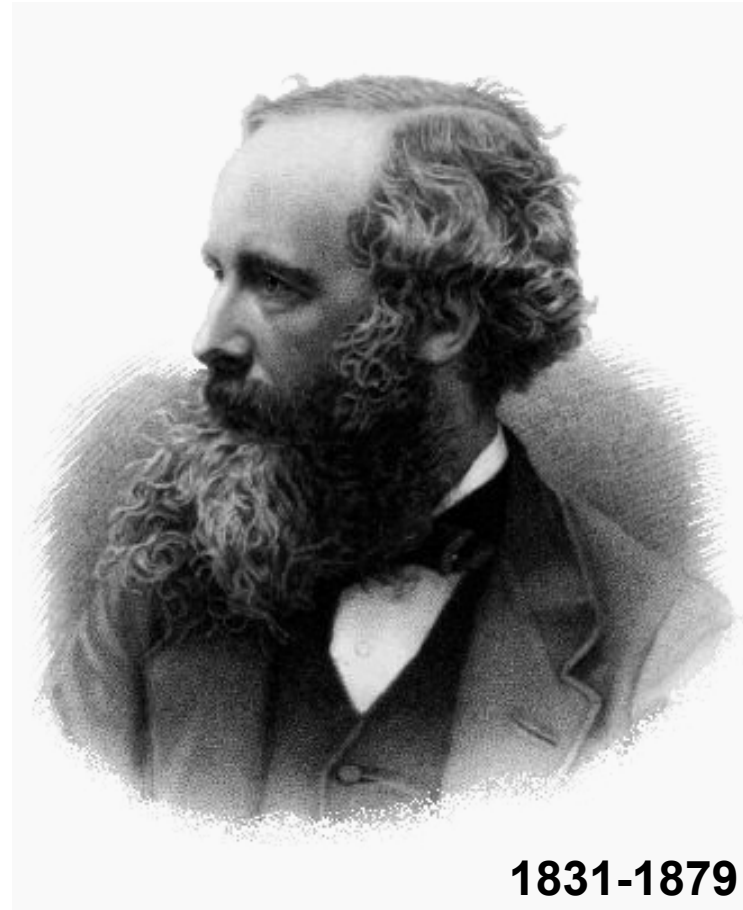
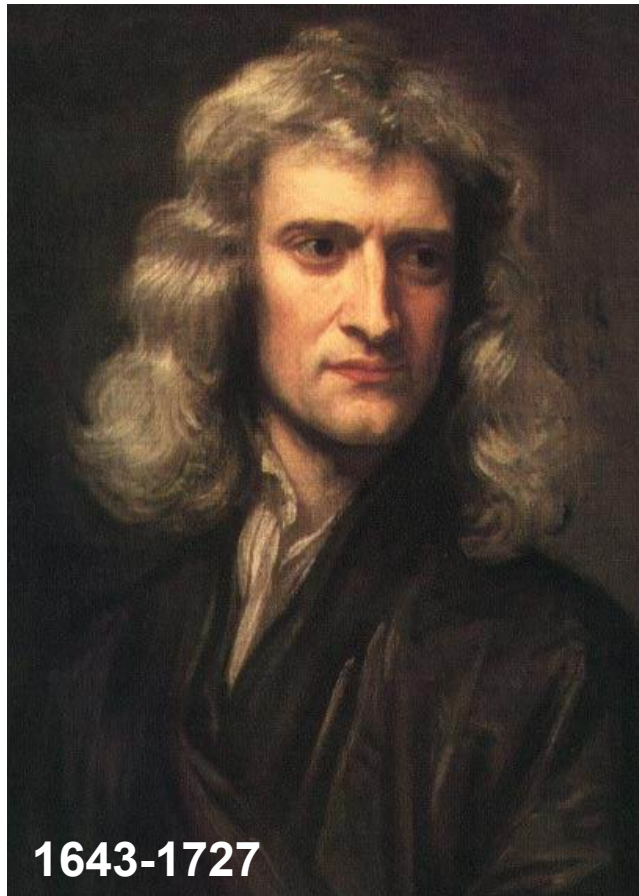
- Osservazione del fenomeno
- Ipotesi
- Esperimento
  - Riproducibile
  - Tale che isoli il fenomeno
- Legge fisica, scritta nel linguaggio della matematica e della geometria
- Predizione teorica

**Falsificabilità della teoria**



# 1874. Le ultime parole famose

*“Il compito della fisica è pressoché esaurito ...”*



“Resta solo da misurare meglio alcune quantità e spiegare discrepanze di **minor conto**, come la radiazione di CORPO NERO”

## ...meccanica quantistica e relatività



- Ma allora la meccanica classica è sbagliata quanto quella Aristotelica??
- Come si concordano la meccanica classica, la relatività e la meccanica quantistica?

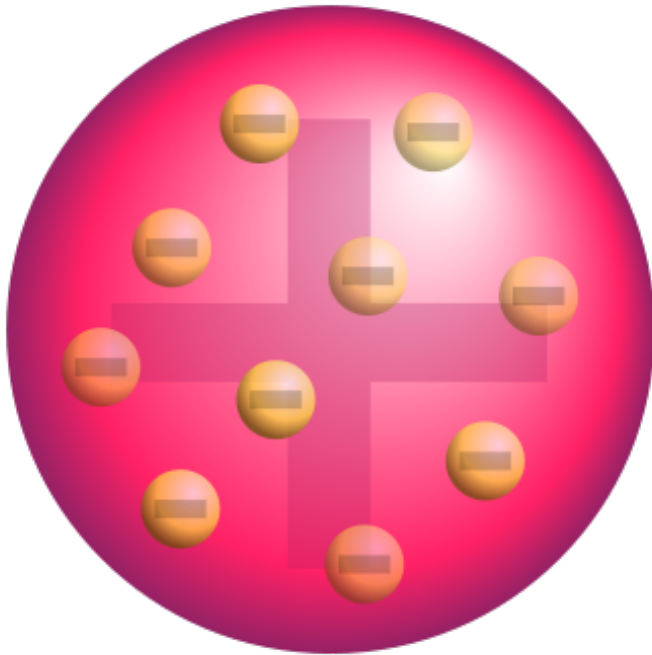
**Ogni teoria ha il suo ambito di validità,  
bisogna conoscerne i limiti!**

Ad esempio com'è fatto l'atomo?



# Atomo di Thomson (1898)

Thomson ipotizza per primo l'esistenza degli  $e^-$ , misurandone addirittura il rapporto  $e/m$  (1897)



Migliaia di elettroni orbitano all'interno di una carica positiva diffusa priva di massa (**plum pudding** model)

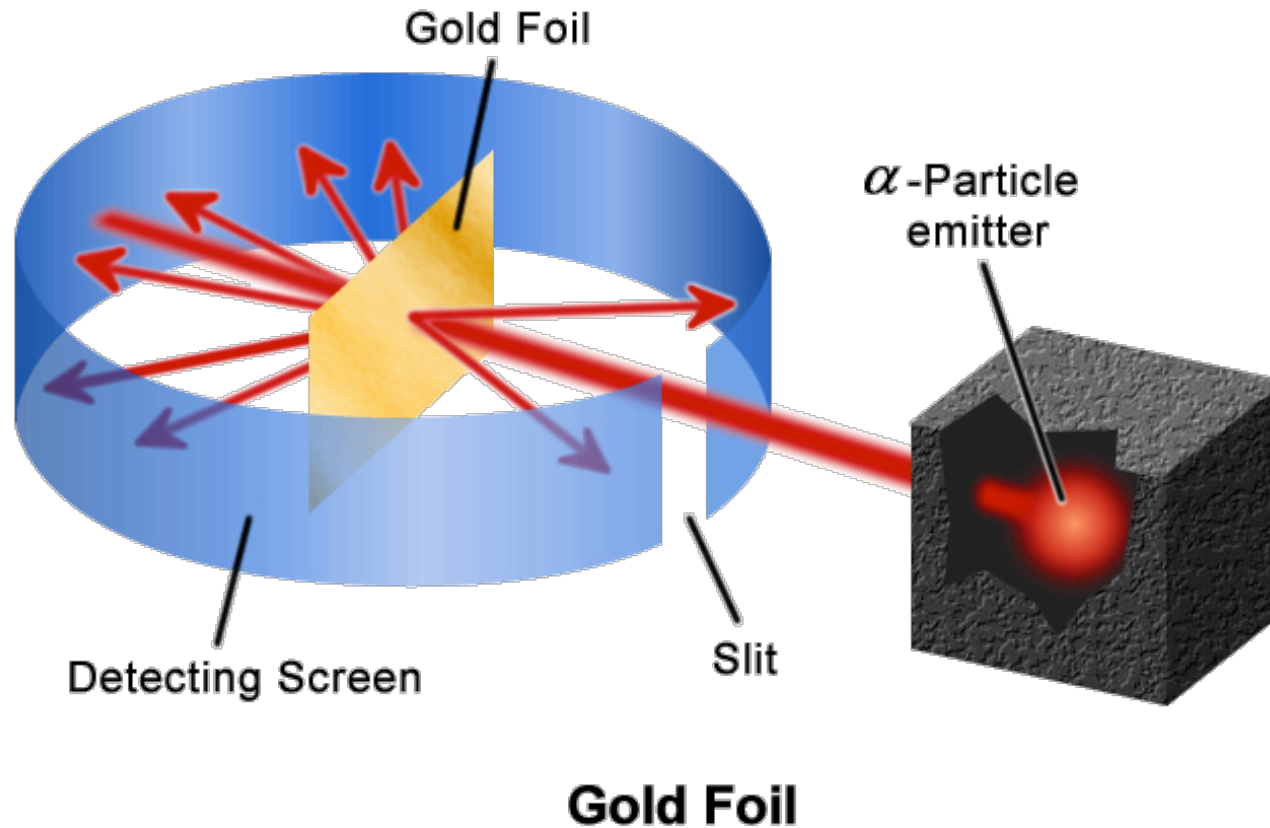
# I limiti del modello di Thomson



- L'e<sup>-</sup> è l'unica carica avente massa, quindi ogni atomo dovrebbe contenere un numero troppo elevato di particelle
- Non spiega la diversa tendenza degli elementi a ionizzarsi e combinarsi tra loro
- Non riesce a spiegare righe di assorbimento ed emissione negli spettri dei materiali
- Non spiega in alcun modo gli esperimenti di urto (scattering) di particelle  $\alpha$  (atomi di He doppiamente ionizzati)

**...ci pensano gli allievi dell'allievo**

# Esperimento di Geiger-Marsden (aka di Rutherford) - 1911



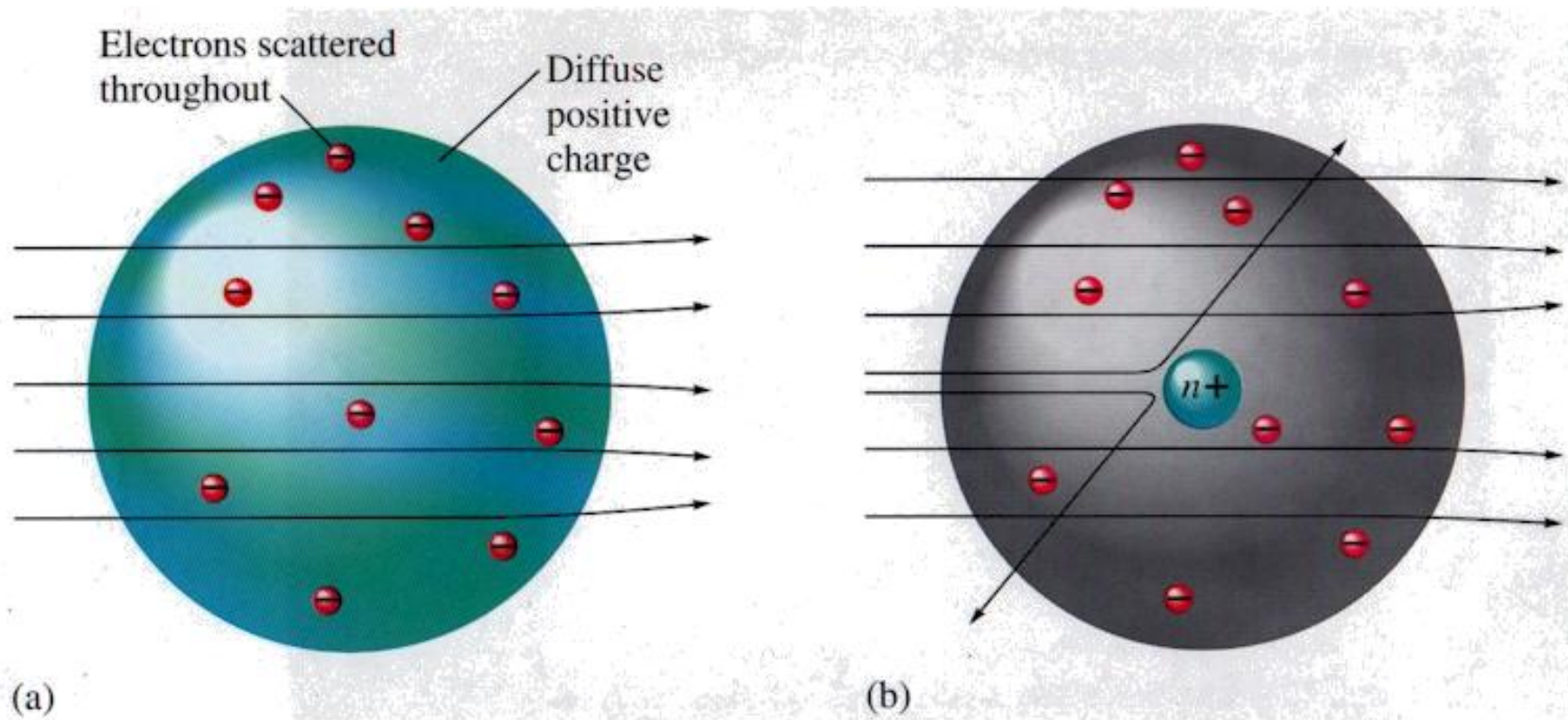
©NCSSM 2002

Deflessione particelle  $\alpha$  su una sottile lamina d'oro.

# Thomson vs Rutherford



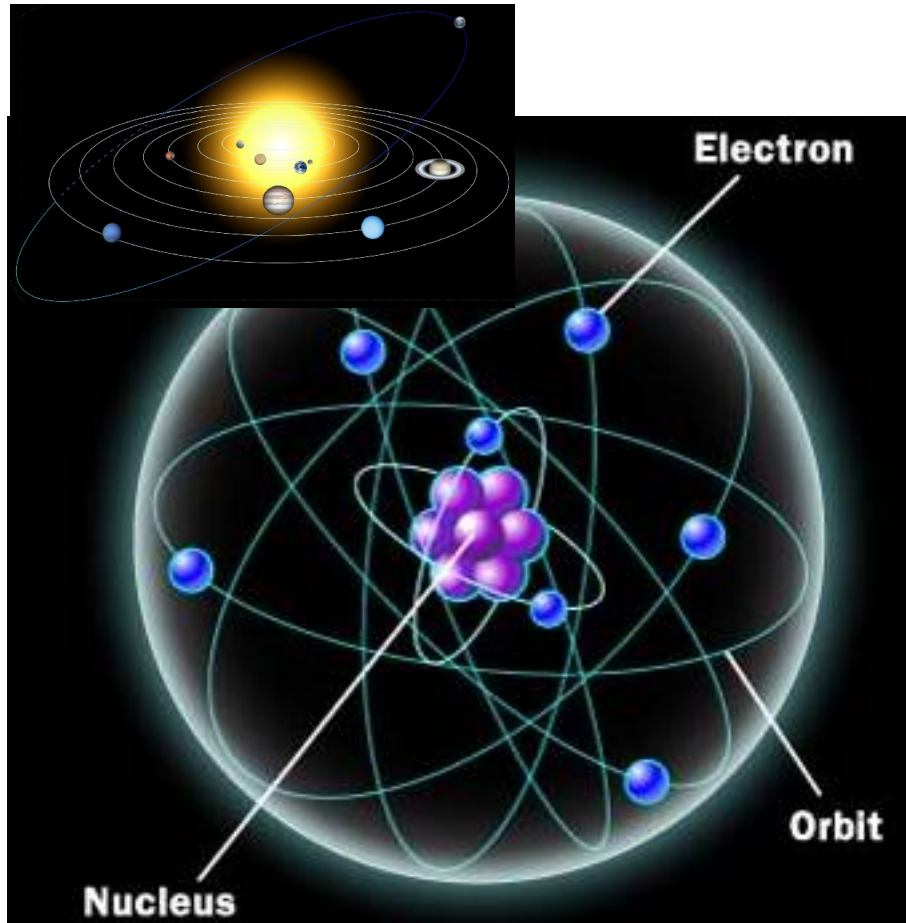
Come spiegare le particelle deflesse a grande angolo e addirittura “back-scatterate”!?



**THOMSON ATOM**

**RUTHERFORD ATOM**

# Atomo di Rutherford



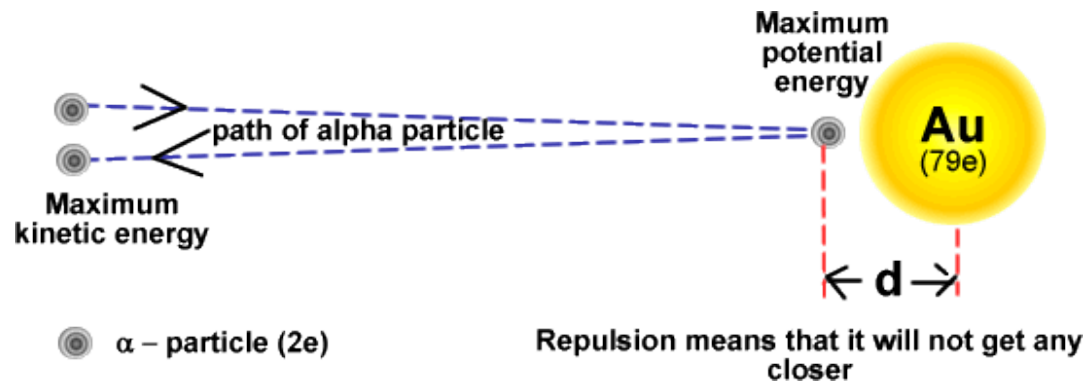
Gli elettroni carichi negativamente orbitano attorno ad un nucleo carico positivamente

# Le dimensioni dell'atomo



$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r}$$

L'energia totale è uguale all'energia cinetica delle particelle  $\alpha$ ,  $T$ , più quella potenziale Coulombiana di repulsione tra cariche dello stesso segno,  $V$ . Con la particella lontana:  $E=T$ . Nel punto di arresto:  $E=V$ .  $E$  è conservata, quindi  $T=V$ .



$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r}$$

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{T}$$

# Le quantità in gioco



$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_\alpha Z_{Au} e^2}{T}$$

Nella formula compaiono: la carica dell'elettrone, la costante dielettrica del vuoto e l'energia cinetica delle particelle  $\alpha$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$$

$$T = 5 \text{ MeV} = 5 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

È comodo sapere che  $1/(4\pi\epsilon_0)$  vale circa  $9 \cdot 10^9$  nelle unità del Sistema Internazionale.

# Un po' di conti...



r così calcolato fornisce un limite superiore per la stima delle dimensioni del nucleo atomico

$$r = \frac{2 \cdot 79 e^2}{4\pi\epsilon_0 T} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 79 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{5 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} =$$
$$= 4.55 \cdot 10^{-14} \text{ m} \approx 45.5 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 45.5 \text{ fm}$$

A quel tempo l'atomo d'oro aveva un raggio  
"ben noto" di  $1.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**3000 volte più grande!**



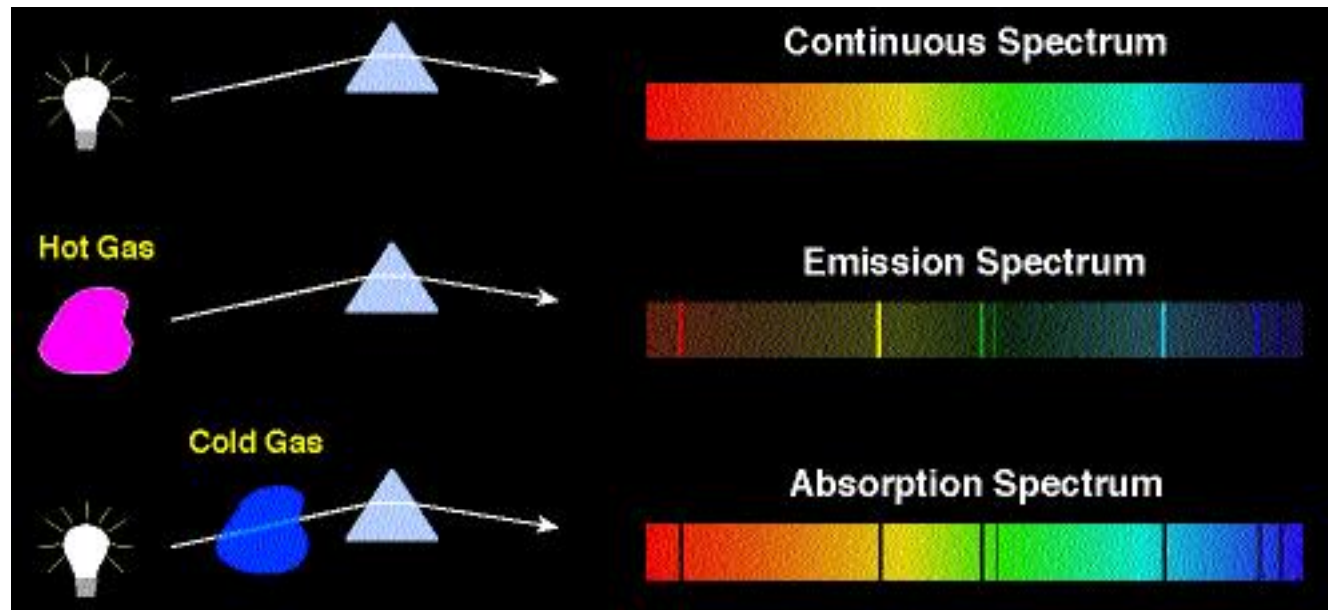
***“Fu l'evento più incredibile mai successomi nella vita. Era quasi incredibile quanto lo sarebbe stato sparare un proiettile da 15 pollici contro un foglio di carta velina e vederlo tornare indietro e colpirti.”***



Pensandoci, ho capito che questa diffusione all'indietro doveva essere il risultato di una sola collisione e quando feci il calcolo vidi che era impossibile ottenere qualcosa di quell'ordine di grandezza a meno di considerare un sistema nel quale la maggior parte della massa dell'atomo fosse concentrata in un nucleo molto piccolo

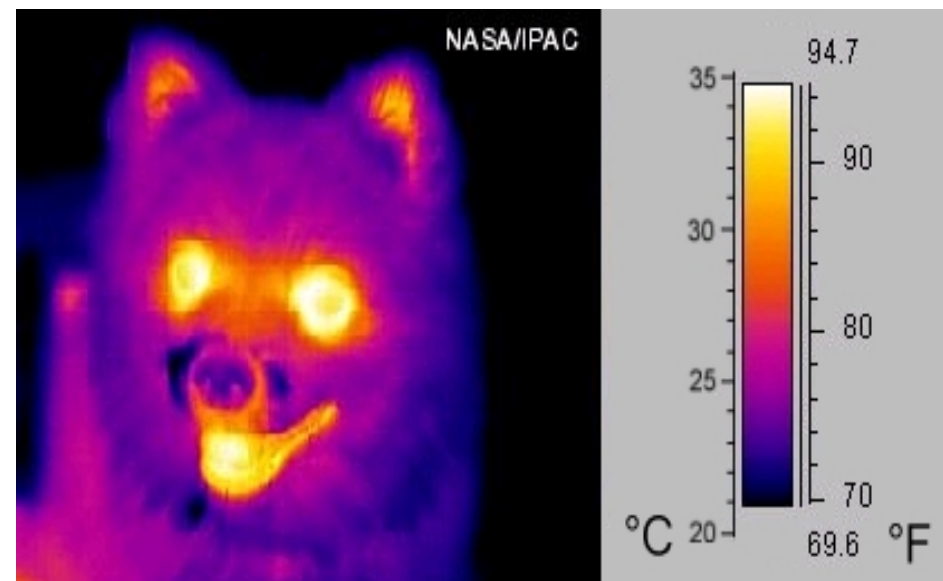
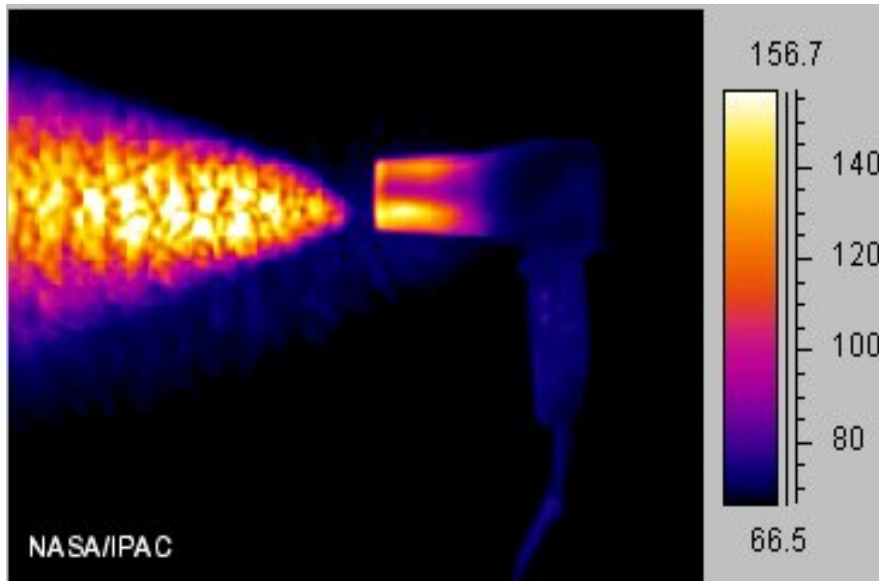
# I limiti del modello Rutherford

- L'e<sup>-</sup> sono cariche in moto, quindi dovrebbero irraggiare, perdendo energia e collassando sul nucleo in  $10^{-10}$  s
- Resta il mistero degli spettri di emissione e assorbimento dei materiali. Perché delle righe!?!?

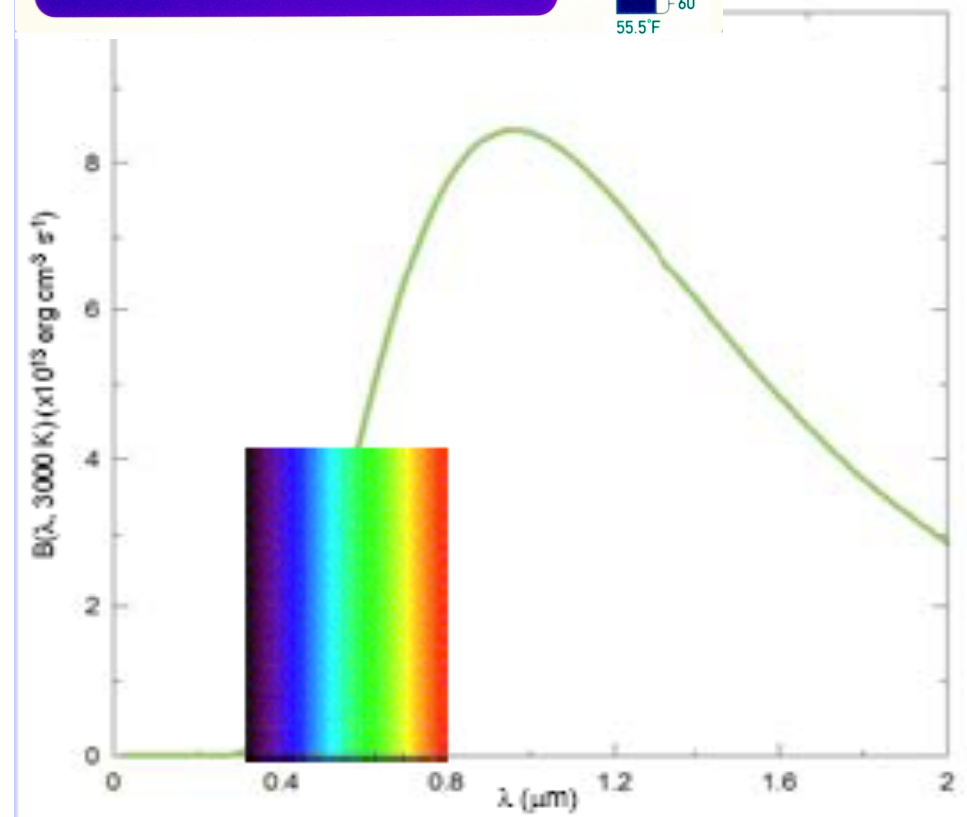
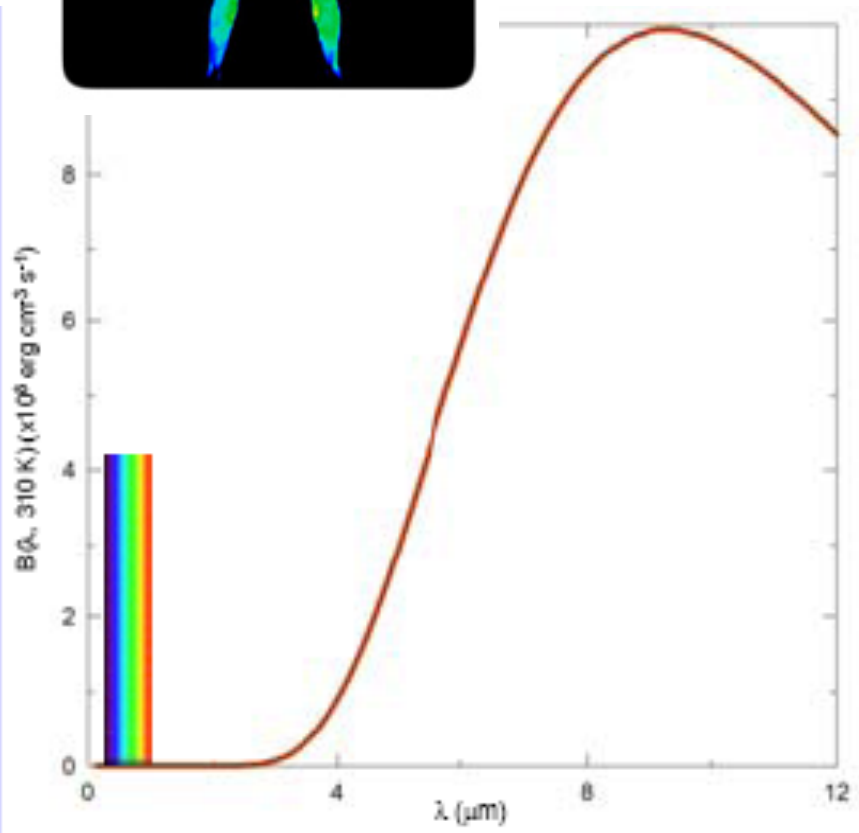
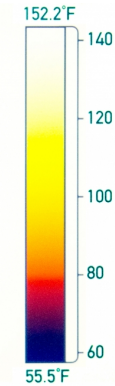
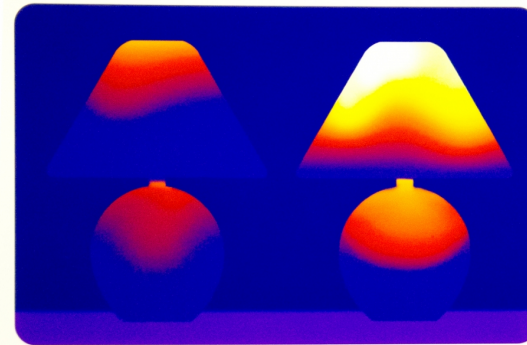
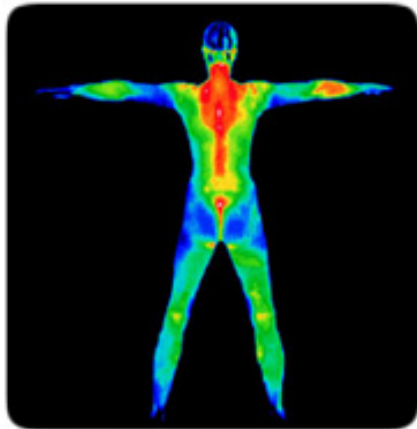


# Emissione

- Ogni oggetto emette energia elettromagnetica in forma di calore
- Un corpo emette radiazione di tutte le lunghezze d'onda ( $\lambda$ ), ma la distribuzione dell'energia emessa in funzione di  $\lambda$  dipende dalla temperatura (T)



# Spettri di emissione di oggetti noti



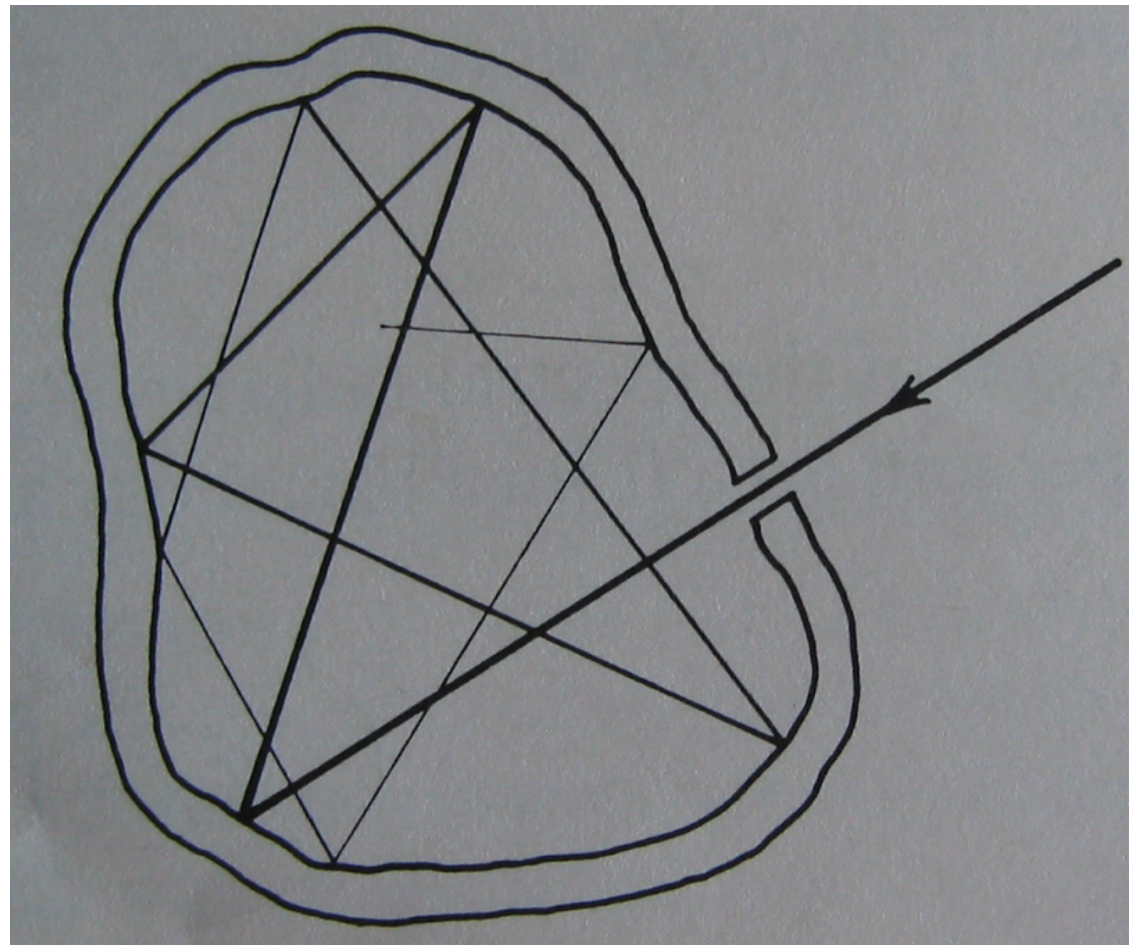
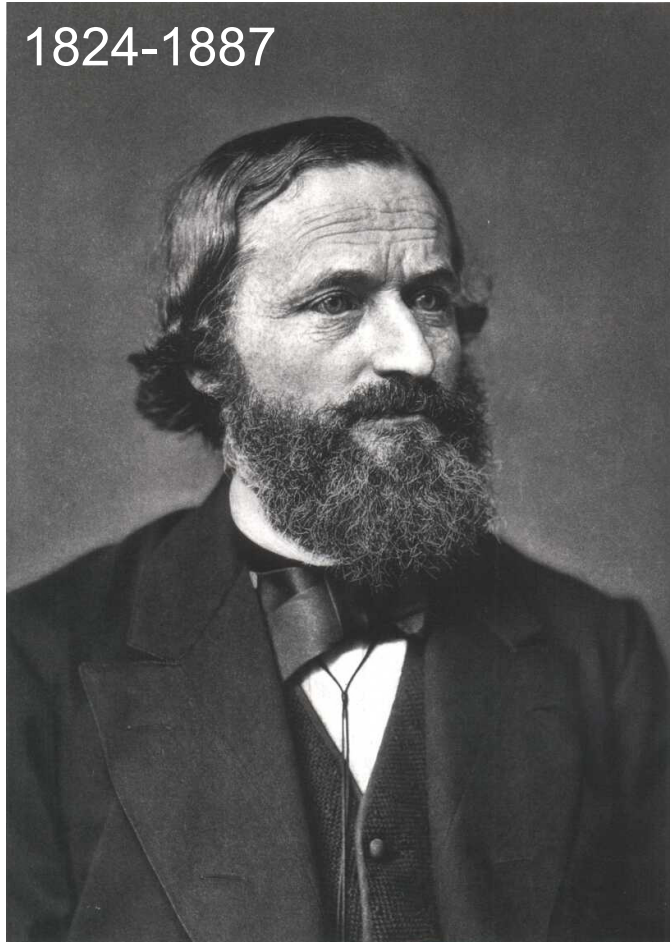
# Il “corpo nero”



- Le cariche di un corpo sono come oscillatori armonici il cui movimento aumenta all'aumentare di  $T$
- Cariche oscillanti emettono radiazione (Maxwell & Hertz 1888) rallentando. E' così che i corpi si raffreddano
- Corpi in equilibrio termico hanno  $e = a$  (emissività e assorbimento) indipendentemente da  $T$  e  $\lambda$
- Corpi ad alta  $T$  assorbono **completamente** la stessa radiazione che emettono. In questo caso (all'equilibrio)  $e=a=1$  e il corpo appare di colore nero (da cui il nome dello spettro associato, detto di “corpo nero”)

# Kirchhoff e il “corpo nero”

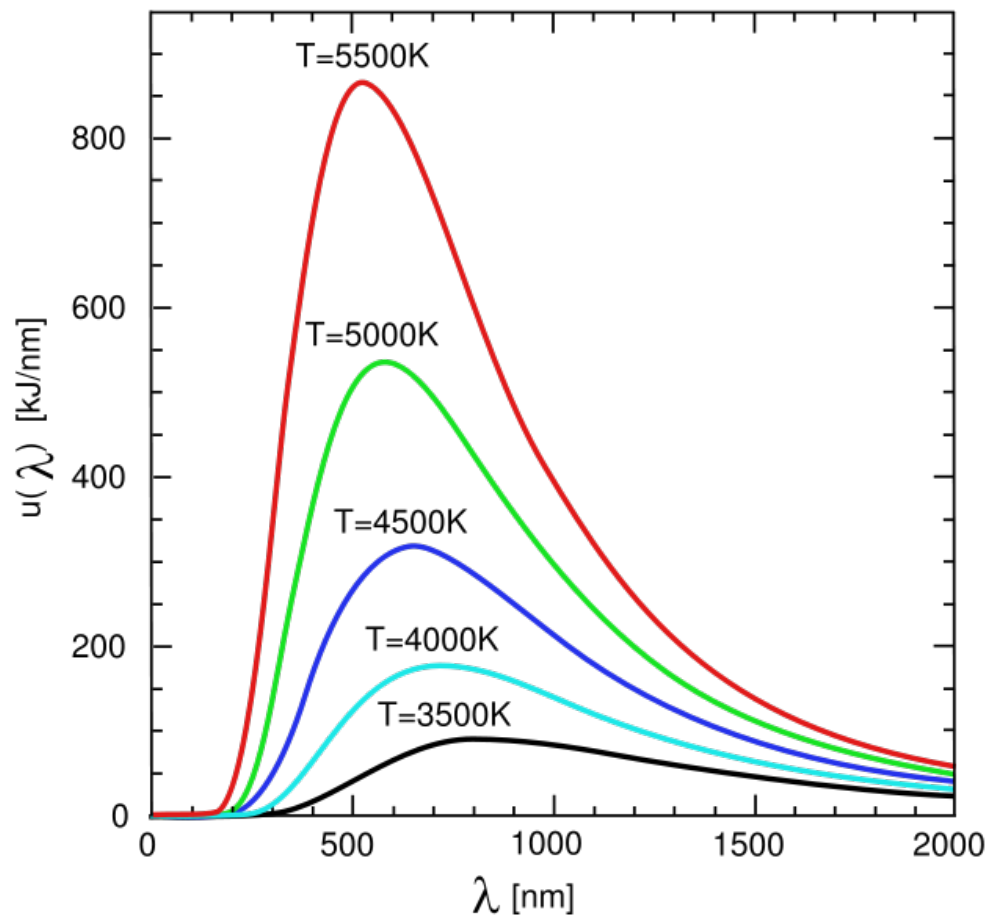
Si può realizzare un dispositivo che si comporta come un corpo nero mantenendo costante la temperatura delle pareti di un oggetto cavo in cui è stato praticato un forellino



# Lo spettro di corpo nero



**Tutti** i corpi neri, alla stessa temperatura, emettono radiazione termica con lo **stesso** spettro (indipendente da forma, dimensioni e composizione chimica)



Dall'osservazione degli spettri:

$$\lambda_{\max} T = \text{costante}$$

Legge di Wien

$$M_{\text{tot}} \propto T^4$$

Stefan (1879)

Dal calcolo teorico:

$$M_{\text{tot}} = \sigma T^4$$

Boltzmann (1879)

# Il problema del “corpo nero” (1/2)



Il flusso netto della radiazione all'interno della cavità in una direzione è nullo, ma c'è movimento di energia in ogni punto, espresso dalla densità di energia radiata nell'intervallo di lunghezze d'onda  $(\lambda, \lambda+d\lambda)$  :  $\Psi_\lambda d\lambda$

Le difficoltà teoriche erano tutte legate al calcolo di  $\Psi_\lambda$  (che fornisce la “shape” dello spettro sperimentale)



## Tentativo #1 (Wien)

Prima formula “empirica”

$$\psi_\lambda = \frac{C}{\lambda^5 e^{C'/\lambda T}}$$



# Il problema del “corpo nero” (2/2)



**Non funziona!** Riproduce bene i dati a basse  $\lambda$  ma non ad alte  $\lambda$ . Inoltre C e C' sono totalmente arbitrarie!

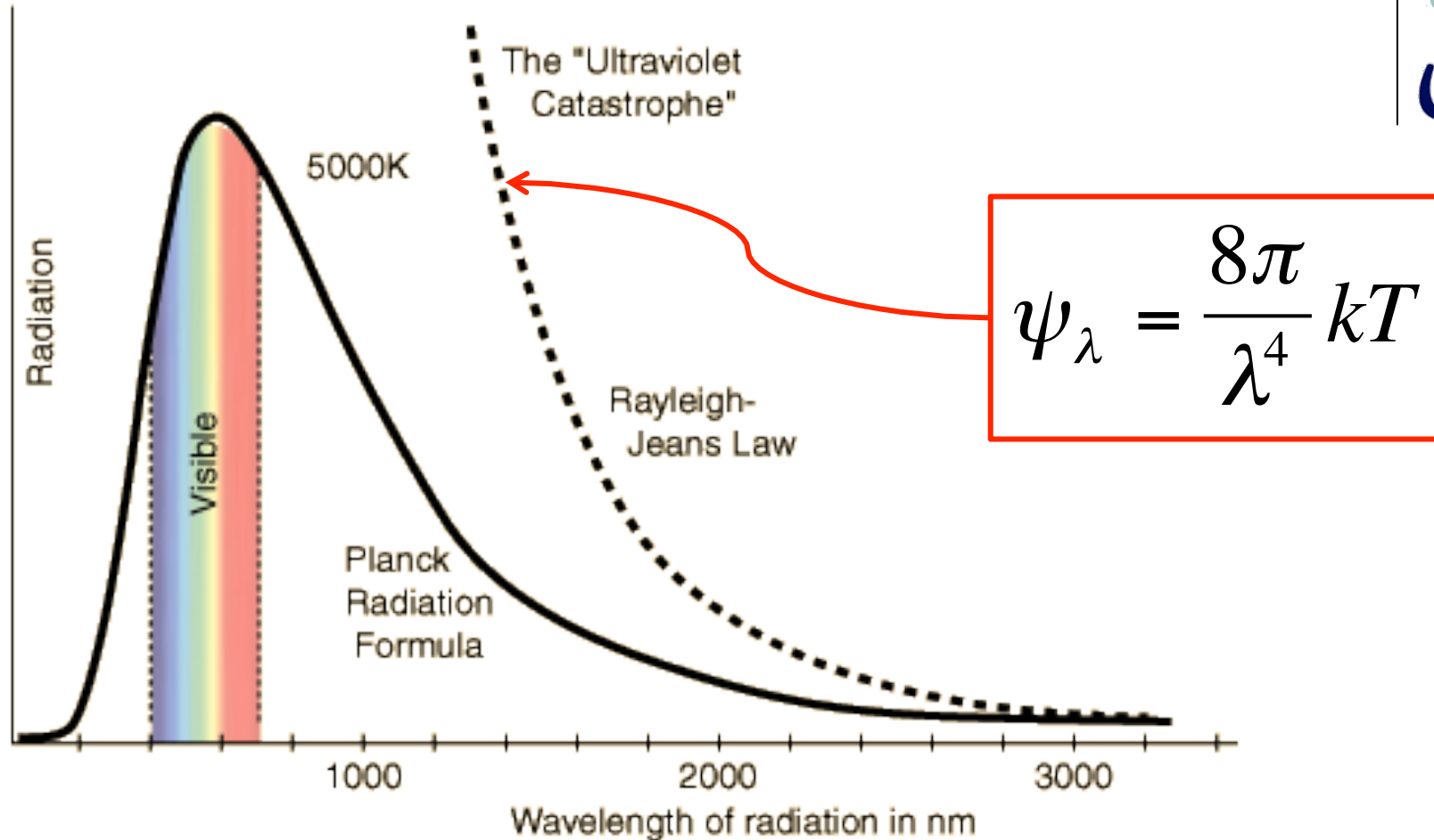
## Tentativo #2 (Rayleigh-Jeans)

Modello con onde stazionarie in cavità. La densità di energia ricavata come densità dei modi per energia cinetica media  $kT$

$$\psi_{\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT$$

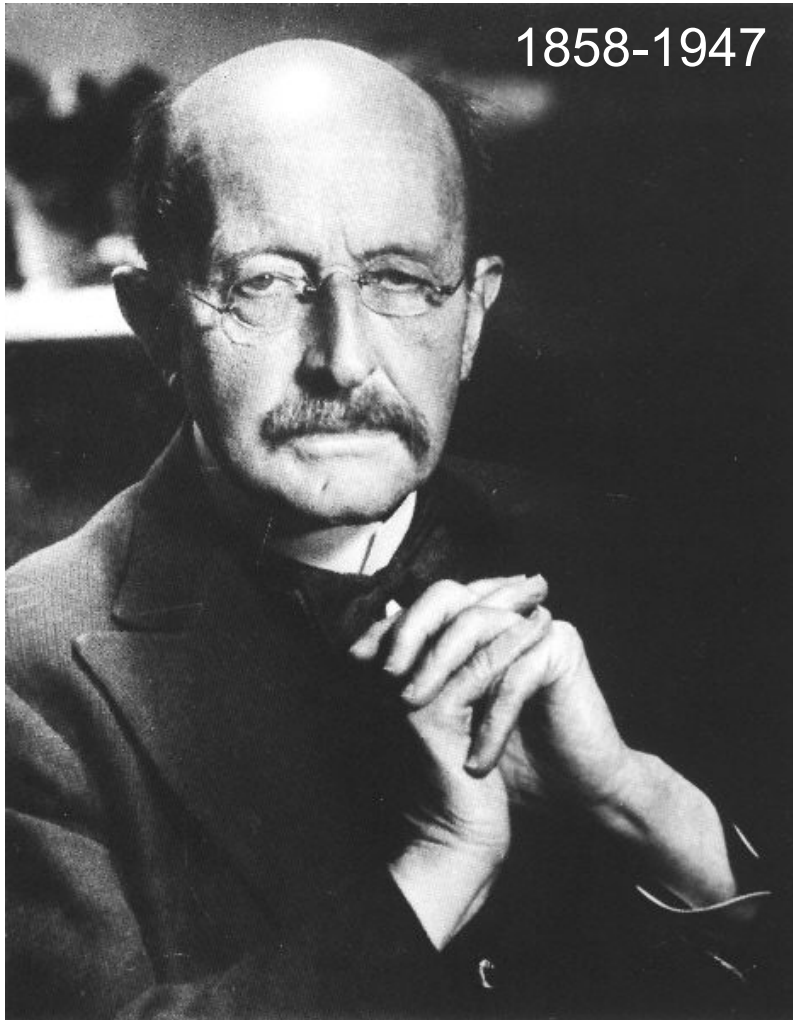
**Non va bene!** Più piccola è  $\lambda$  maggiore è il numero di onde stazionarie possibili! (eppure tutto è calcolato correttamente...)

# La “catastrofe ultravioletta”



- Wien : formula empirica e valida solo a piccole  $\lambda$
- Rayleigh-Jeans : formula coerente, ma valida solo ad alte  $\lambda$

# Ottobre 1900. La soluzione “fortunata”

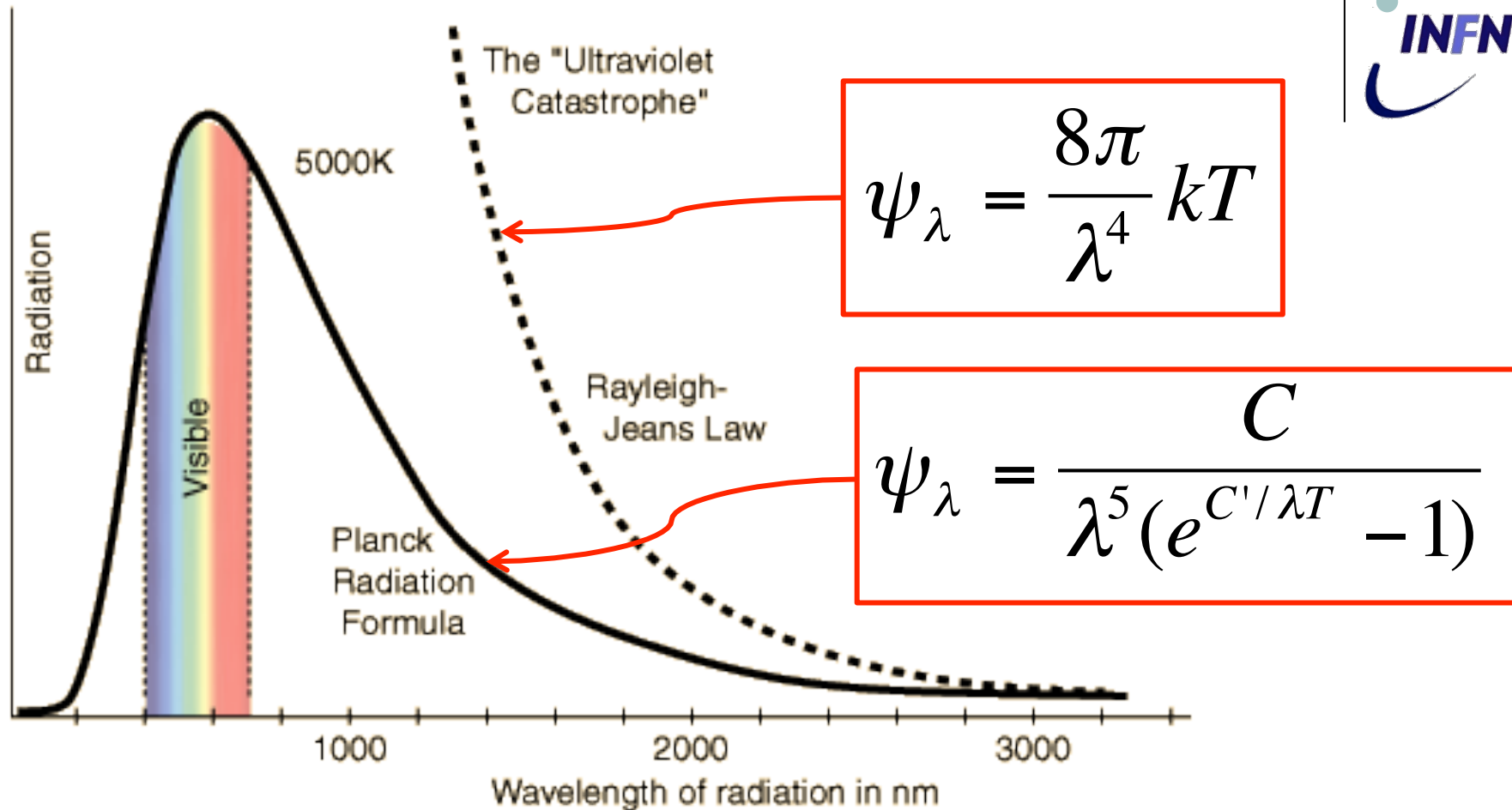


Max Planck “risolve” il problema dello spettro della radiazione di corpo nero, con una nuova formula empirica ...

$$\psi_{\lambda} = \frac{C}{\lambda^5 (e^{C'/\lambda T} - 1)}$$

- E le costanti C e C' !?
- E soprattutto: funziona... ma **perché!**!?!?

# La soluzione al problema?!



L'accordo con i dati sperimentali di Rubens è perfetto.  
Tuttavia Planck non riesce a trovare una spiegazione fisica...

# L'ostinazione e la svolta...



*“Qualcosa di imponente sta emergendo dall’osservazione di un semplice pezzo di carbone ardente...”*

*“Una giustificazione teorica va trovata, non importa quanto sia lontana dalle conoscenze attuali”*

*Max Planck*

Ragionando sui risultati di RJ, Planck capisce che il problema sta nel considerare allo stesso modo tutti i modi di vibrazione.

Dopo innumerevoli tentativi basati su teorie classiche, Planck Compie il famoso **“atto disperato”** negando la continuità delle leggi di Natura. Siamo nel Dicembre 1900.

# La proposta di Planck



Gli oscillatori presenti nella cavità del corpo nero possono assumere solo energia pari ad un multiplo intero di un valore ben preciso, detto **quanto di energia**, dipendente dalla frequenza : **hf**

( h costante di Planck estrapolata dai dati  $h = 6.55 \times 10^{-34}$  Js )

Il postulato consente di “limitare” la porzione di alta frequenza degli oscillatori, dato che lo scambio di energia prevede lo spostamento di maggiori quantità di energia (sempre mantenendo il corpo nero in equilibrio!)

$$E_n = nhf \quad n \in N$$

# Preparazione al calcolo di Planck



Planck si basa sulla distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle energie delle molecole in un gas a temperatura  $T$  (applicandola agli oscillatori della cavità)

Il numero di oscillatori con energia  $E$  è proporzionale a  $e^{-E/kT}$

Il valor medio dell'energia degli oscillatori (a fissata  $\lambda$ ) sarà:

$$\langle E \rangle = \frac{\text{Total Energy}}{\# \text{ of oscillators}}$$

La frazione di molecole con energia in  $(E, E+dE)$  è:

$$N(E, E + dE) = N_T e^{-E/kT} dE$$

# Il calcolo di Planck (1/2)



Nel caso continuo (pre-Planck) quindi:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} N_T e^{-E/kT} dE}{N_T} = \dots = kT$$

Moltiplicando tale energia media per il numero di modi, si ottiene la formula di Rayleigh-Jeans!

Nel caso discreto di Planck si avranno:

- N1 particelle a energia hf:  $N_1 = N_0 e^{-hf/kT}$
- N2 particelle a energia 2hf:  $N_2 = N_0 e^{-2hf/kT}$
- N3 particelle a energia 3hf:  $N_3 = N_0 e^{-3hf/kT}$
- Etc...



# Il calcolo di Planck (2/2)



$$N_1 = N_0 e^{-hf/kT} \quad N_2 = N_0 e^{-2hf/kT} \quad N_3 = N_0 e^{-3hf/kT} \quad \dots$$

$$\langle E \rangle = \frac{N_0 E_0 + N_1 E_1 + N_2 E_2 + \dots}{N_0 + N_1 + N_2 + \dots} = \frac{N_0 hf (0 + e^{-hf/kT} + 2e^{-2hf/kT} + \dots)}{N_0 (1 + e^{-hf/kT} + e^{-2hf/kT} + \dots)}$$

chiamiamo:  $x = e^{-hf/kT}$  e fermiamoci al 3° ordine

$$\langle E \rangle = \frac{hf (0 + x + 2x^2 + 3x^3)}{(1 + x + x^2 + x^3)}$$

ma:  $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3$      $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

$$\langle E \rangle = hf \frac{(1-x)^{-2} x}{(1-x)^{-1}} = hf \frac{x}{(1-x)} = hf \frac{1}{(1/x - 1)} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

**LOOKS  
FAMILIAR !??!**

# Tutto torna!

Provate ad immaginare l'espressione di Planck nel vedere comparire esattamente la sua "formula fortunata", senza nessun artificio matematico! (C e C' incluse)



$$\Psi_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} d\lambda$$

Ricordando che  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

**Basse f (grandi  $\lambda$ )**  $\Psi_{\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hf/kT} - 1} \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hckT}{hf} = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{k}{\frac{1}{\lambda T}} = C \frac{T}{\lambda_4}$  **Wien**

**Alte f (piccoli  $\lambda$ )**  $\Psi_{\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hf/kT} - 1} \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hf/kT}} = \frac{1}{\lambda^5} \frac{C}{e^{C'/\lambda T}}$  **RJ**

# Cosa significa fisicamente?



*“I tried for many years to save physics from discontinuous energy levels...”*

*Max Planck*

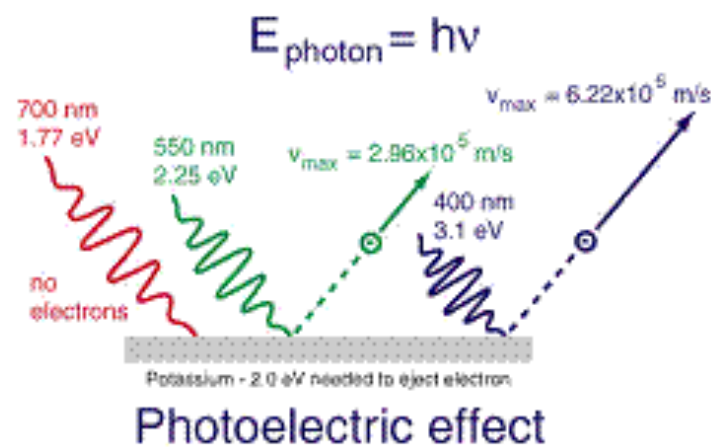
- Non c'è modo per la fisica classica di spiegare lo spettro di corpo nero;
- Non tutti i valori di energia sono possibili; l'energia è **discretizzata** (o **quantizzata**);
- Nasce la moderna teoria quantistica! Altri strani comportamenti della Natura finiscono per essere capiti facilmente alla luce della quantizzazione (effetto fotoelettrico, spettri di assorbimento etc...)

# L'effetto fotoelettrico (1/2)



La nuova teoria è difficile da accettare, tranne per uno, che ne intuisce da subito il grande potenziale. A. Einstein.

In soli 5 anni la teoria di Planck viene estesa e utilizzata per spiegare il misterioso “effetto fotoelettrico” già noto a livello sperimentale agli inizi del 1900



- Quando la luce incide su un metallo vengono espulsi  $e^-$
- L'energia cinetica degli elettroni è indipendente dall'intensità della luce, ma dipende in modo lineare solo dalla  $f$
- Se aumenta  $I$ , aumenta solo il # di  $e^-$  estratti, ma non l'energia cinetica
- Non tutte le frequenze estraggono  $e^-$

# L'effetto fotoelettrico (2/2)



L'energia del fascio di luce si propaga in pacchetti di valore  $hf$ . Questo quanto di luce (o fotone) può essere completamente trasferito ad un  $e^-$

Supponendo che occorre un certo lavoro  $W$  per estrarre un  $e^-$  dal metallo, allora tale  $e^-$  estratto avrà un'energia cinetica di:

$$E_{\text{cin}} = E - W = hf - W$$

$W$  è detto potenziale di estrazione del metallo (indipendente dalla  $f$ )

# L'affermazione della teoria

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico fornisce la prova della validità dell'ipotesi di quantizzazione di Planck, aprendo la strada allo sviluppo della meccanica quantistica...

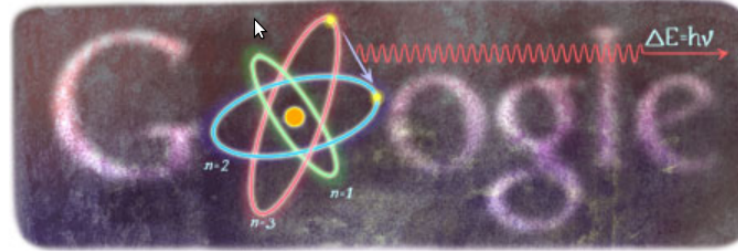


SOLVAY CONFERENCE 1927

colourized by pastelcolour.com

A. PICARD    E. HENRIOT    P. EHRENFEST    Ed. HERSEN    Th. DE DONDER    E. SCHRÖDINGER    E. VERSCHAFFELT    W. PAULI    W. HEISENBERG    R.H FOWLER    L. BREILOUIN  
P. DEBYE    M. KNUDSEN    W.L. BRAGG    H.A. KRAMERS    P.A.M. DIRAC    A.H. COMPTON    L. de BROGLIE    M. BORN    N. BOHR  
I. LANGMUIR    M. PLANCK    Mme CURIE    H.A. LORENZ    A. EINSTEIN    P. LANGEVIN    Ch.E. GUYE    C.T.R. WILSON    O.W. RICHARDSON  
Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL

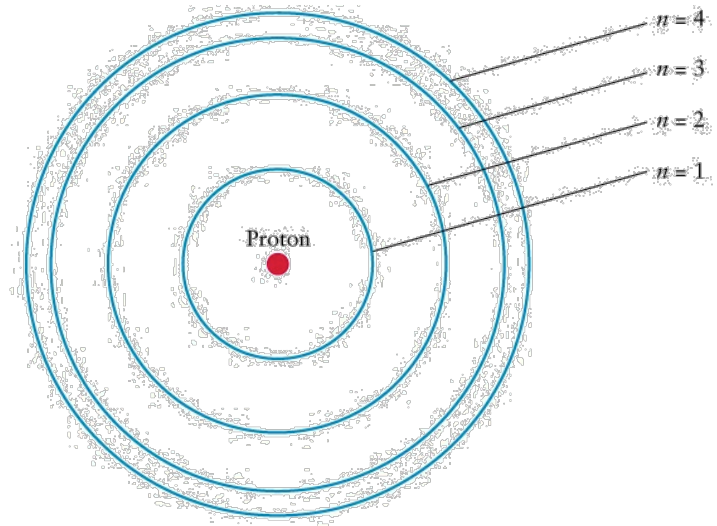
# Atomo di Bohr (1913)



Anche altre grandezze possono essere quantizzate?

$$F_C = F_E \rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

$$\frac{m^2v^2r^2}{rmr^2} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} \rightarrow r = L^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{mq^2}$$

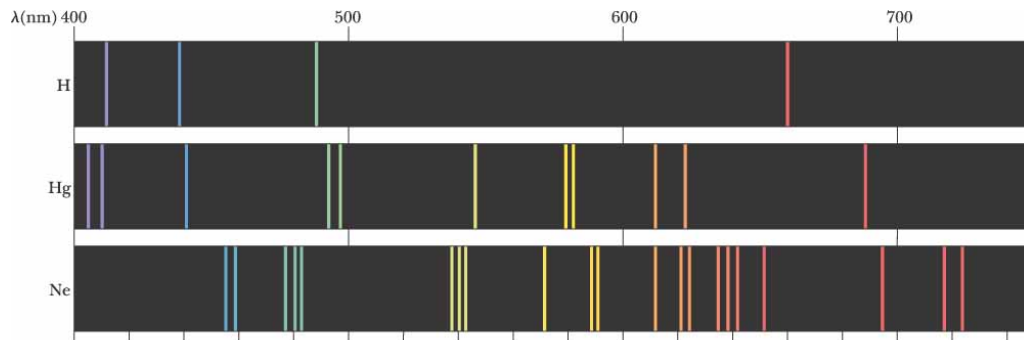


Supponendo quantizzato anche il **momento angolare** ( $L=nh/2\pi$ ) si ottiene la quantizzazione dei raggi delle orbite degli elettroni attorno al nucleo.

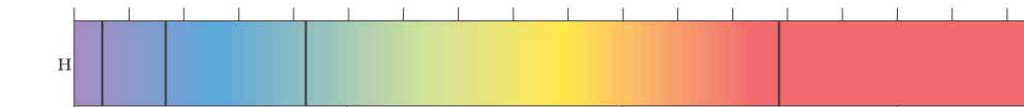
Ciò spiega perché essi **non** emettono radiazione (perdendo energia) e quindi perché non collassano sul nucleo!

# Gli spettri atomici

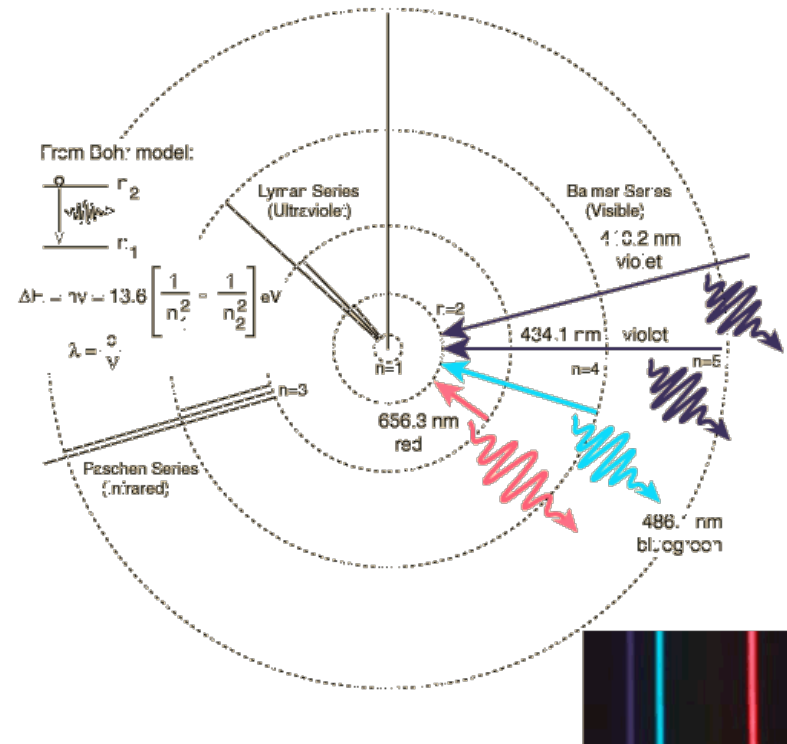
La quantizzazione del momento angolare permette di spiegare in modo diretto le strane righe di emissione e assorbimento degli atomi...



(a)

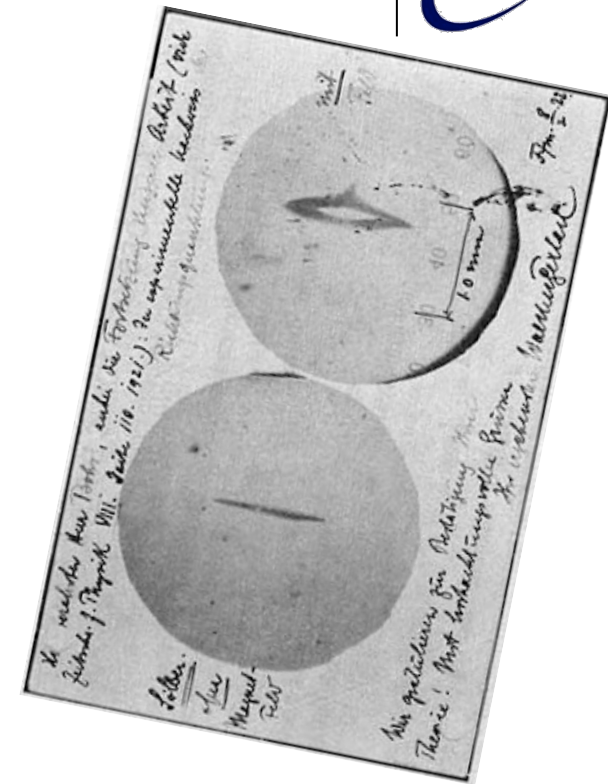
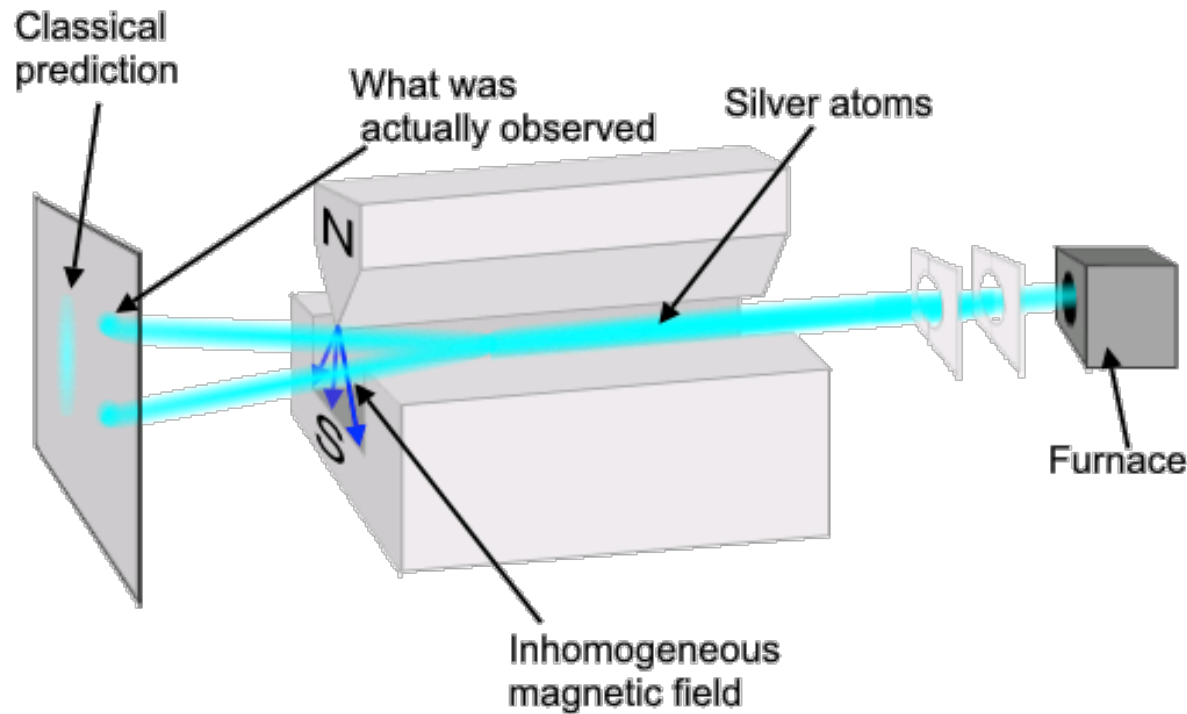


(b)





# Esperimento di Stern-Gerlach (1922)



**Verifica sperimentale della quantizzazione del momento angolare**

# L'ipotesi di De Broglie (Tesi PhD, 1924)



- Per un fotone valgono le seguenti relazioni

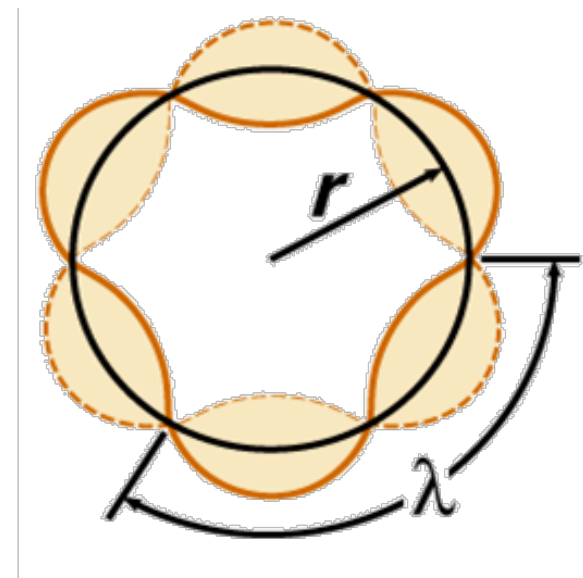
$$E = hf \rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

- De Broglie suppose che anche per una particella materiale valessero le stesse equazioni. E' a causa del piccolo valore di  $h$  che a livello macroscopico non vediamo gli effetti della meccanica quantistica

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

- L'elettrone è dunque anche un'onda e pertanto deve avere un numero di lunghezze d'onda intero in un'orbita ( $n\lambda=2\pi r$ )

$$L = rmv = rp = \frac{n\lambda}{2\pi} \cdot \frac{h}{\lambda} = n\hbar$$

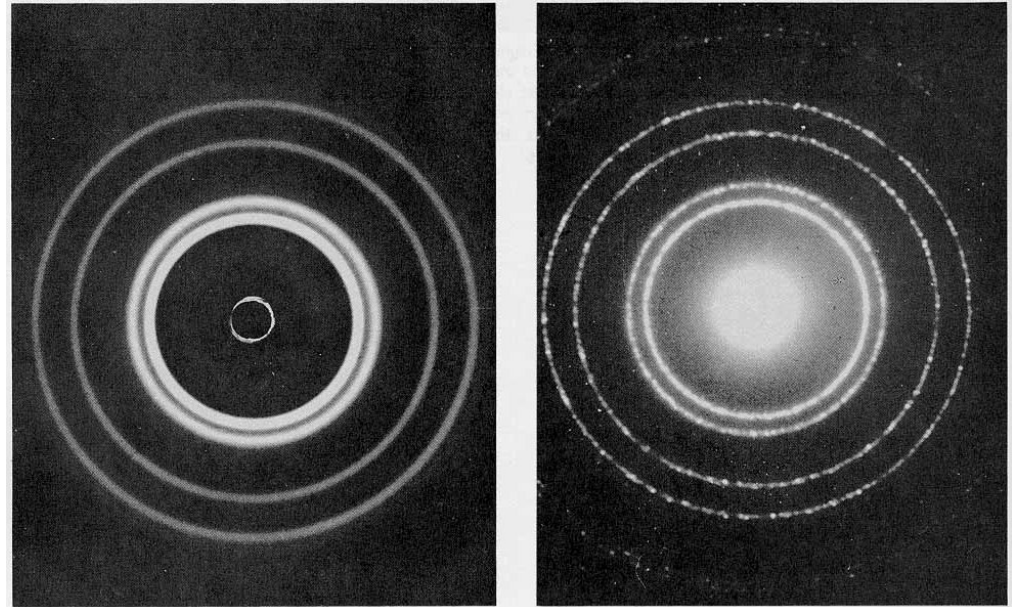


# Diffrazione di $e^-$

Esperimento di Davisson & Germer (1925)



The diffraction pattern on the left was made by a beam of x rays passing through thin aluminum foil. The diffraction pattern on the right was made by a beam of electrons passing through the same foil.



...e anche il dualismo onda corpuscolo è dimostrato!

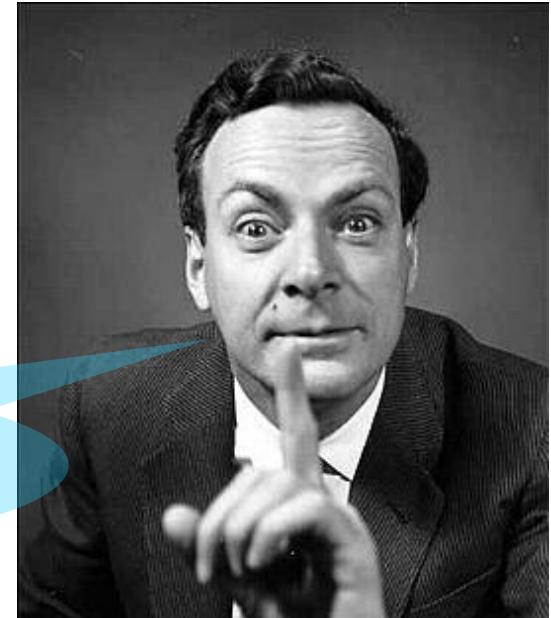
# Conclusioni

- La costante di Planck ( $h = 6.62618 \times 10^{-34}$ ) gioca un ruolo fondamentale nella teoria quantistica
- Definisce il “quanto” fondamentale di radiazione
- Definisce la scala di grandezza in cui i fenomeni quantistici giocano un ruolo rilevante



***“But how can it be like that?”***

***Nobody knows how it  
can be like that.”***



# Grazie per l'attenzione

---

