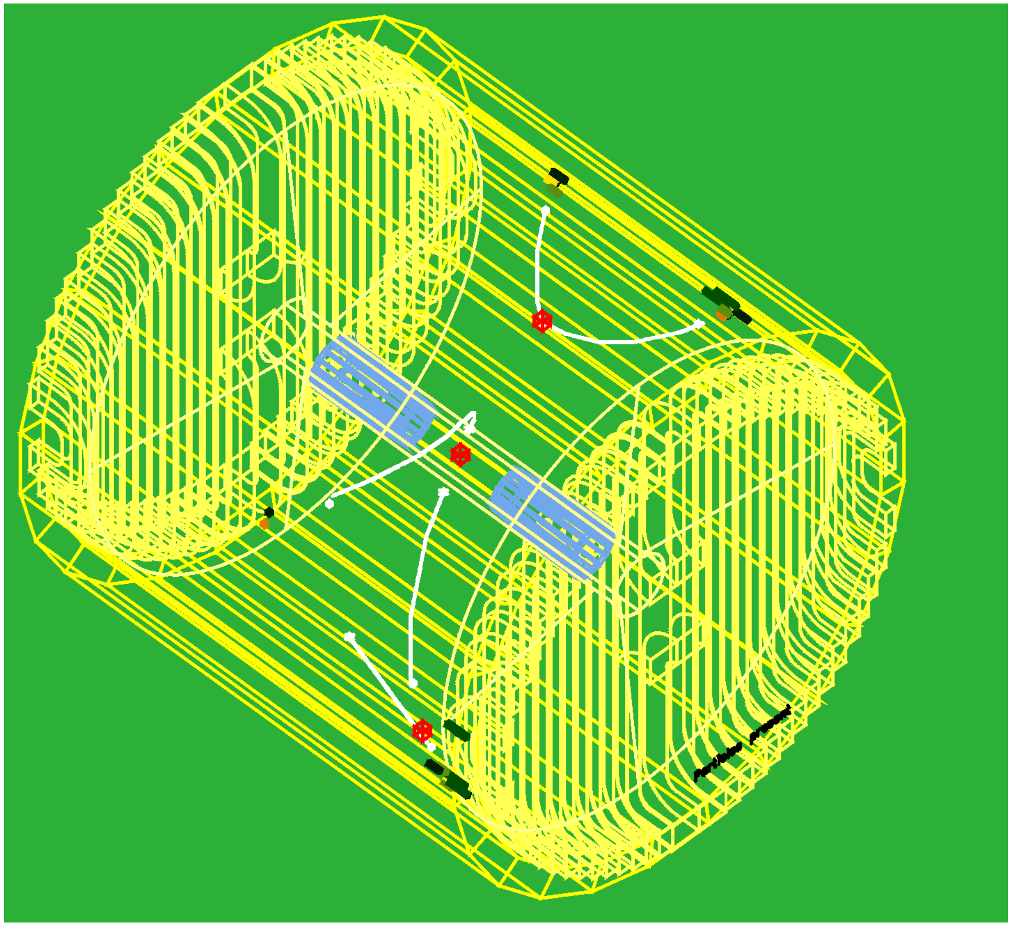
Analisi Dati (Esperimento KLOE)

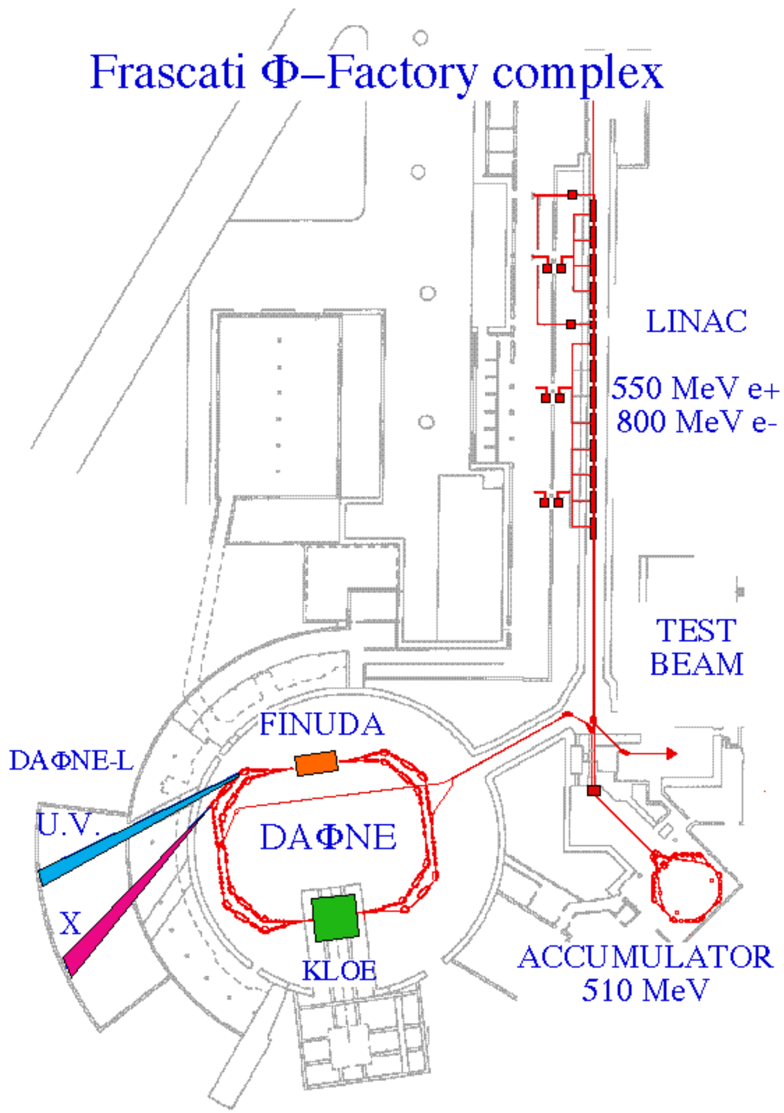


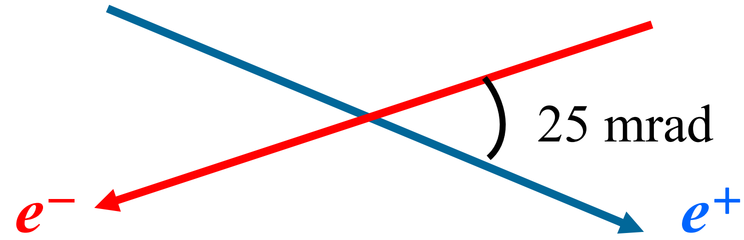
Analisi cinematica del decadimento dei mesoni K carichi con i dati dell'esperimento KLOE

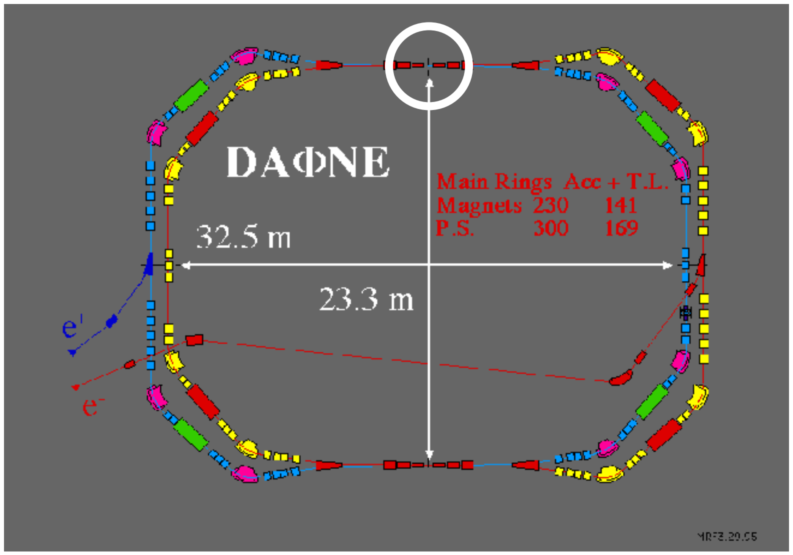
M. Palutan
B. Sciascia

Incontri di Fisica 2007
Laboratori Nazionali di Frascati

Il collisore DAΦNE



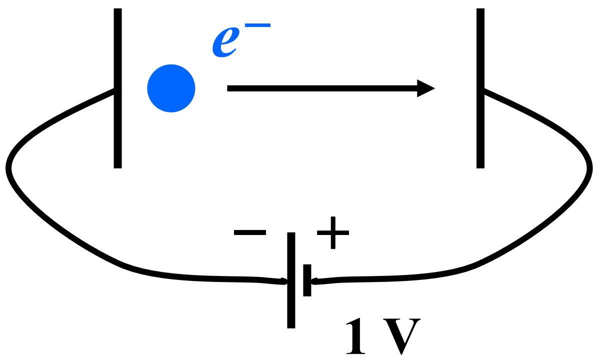




$$E^+ = E^- = 510 \text{ MeV}$$
$$E_{\text{tot}}(\text{CM}) \approx 1019.5 \text{ MeV} = M_\phi$$

Unità di misura per energia, massa, impulso

Misura comoda per l'energia di un elettrone:



Elettronvolt (eV)

Energia di un elettrone accelerato da un potenziale di 1 volt

Useremo più spesso: keV, **MeV**, GeV

Quanto "pesa" un elettrone? 9.11×10^{-31} kg

Rapporto tra massa di una particella e la sua energia da ferma:

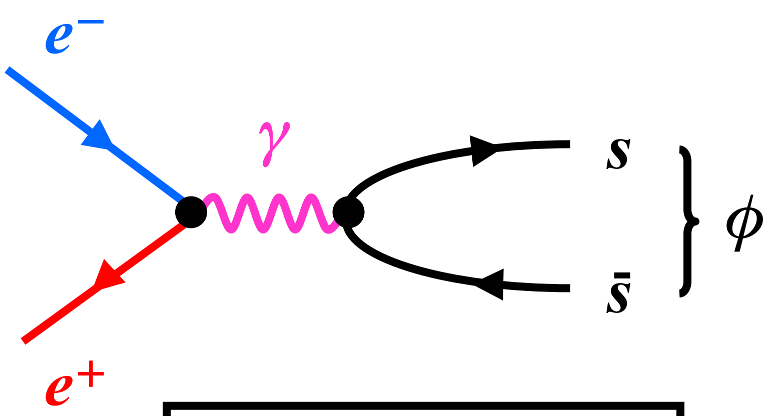
$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

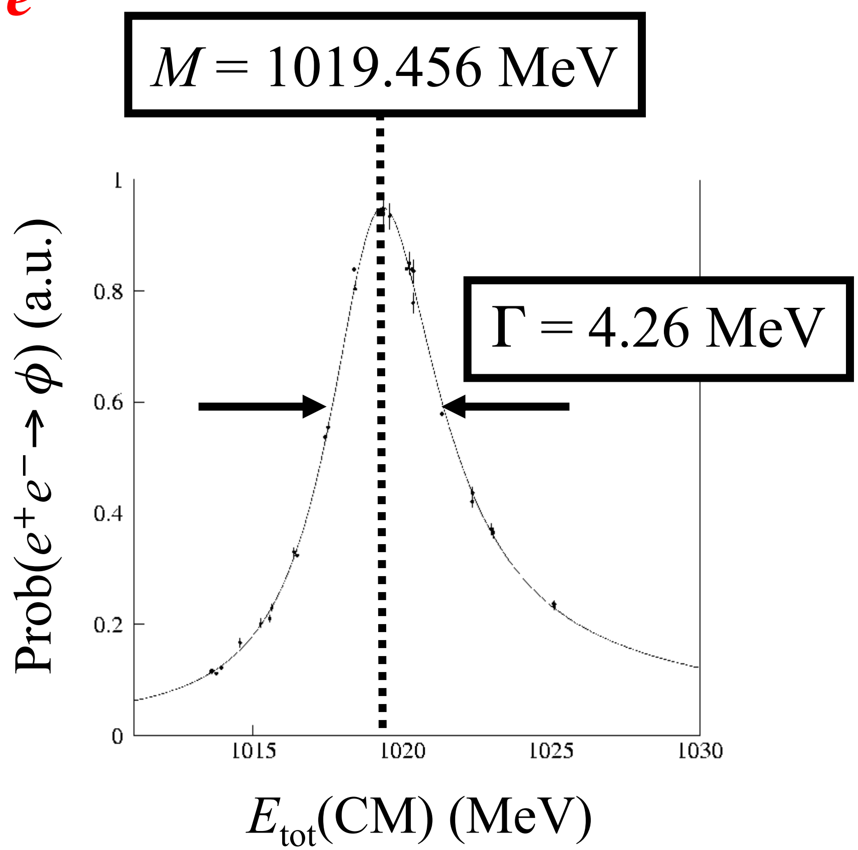
La massa si può esprimere in unità di energia: **MeV/c^2**

Quanto pesa un elettrone? **0.511 MeV/c²**

Spesso tralasciamo la ***c*** e parliamo di energie, impulsi e masse in **MeV**

Produzione e decadimento del mesone ϕ





Il mesone ϕ è instabile, e decade in un tempo $\tau = 1.6 \times 10^{-22}$ s, creando stati finali con altre particelle (mesoni **K**, mesoni **π**); I modi di decadimento dominanti sono:

1) $\phi \rightarrow K^+K^-$ 49.1 %

2) $\phi \rightarrow \bar{K}^0K^0$ 34.1 %

Mesoni e barioni

i Quark

$q = +2/3e$	***u***	***c***	***t***
$q = -1/3e$	***d***	***s***	***b***

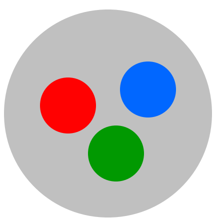
Tutti le particelle di materia hanno:

- spin
- antiparticelle di carica opposta

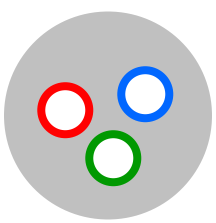
I quark possiedono anche carica di colore

Gli stati legati (*adroni*) sono di colore neutro

Barioni (spin 1/2, 3/2, ecc.)

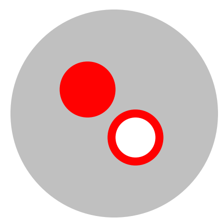


protone (*uud*)
neutrone (*udd*)



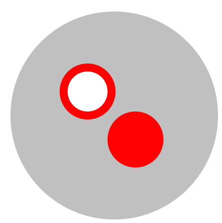
antiprotone ($\bar{u}\bar{u}\bar{d}$)
antineutrone ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$)

Mesoni (spin 0, 1, ecc.)



K^{+} $\bar{u}s$
π^{+} $\bar{u}d$

particella

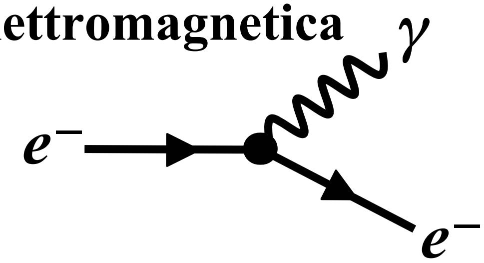


K^{-} ${}^{-}us$
π^{-} ${}^{-}ud$

anti-particella

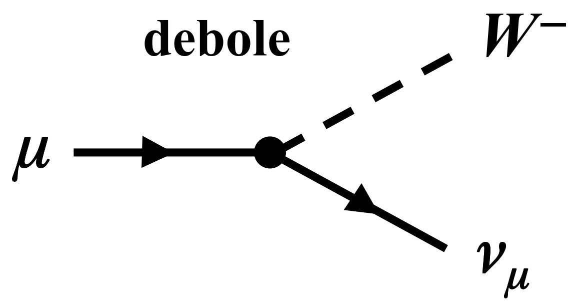
Interazioni fondamentali ⟷ decadimenti

interazione **elettromagnetica**



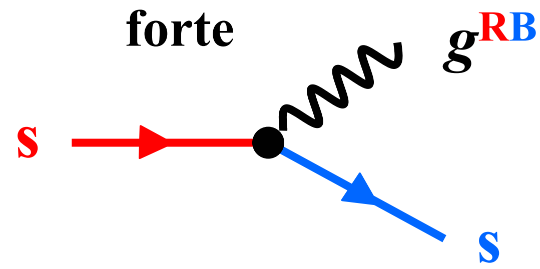
cariche elettriche
+ fotoni

interazione **debole**



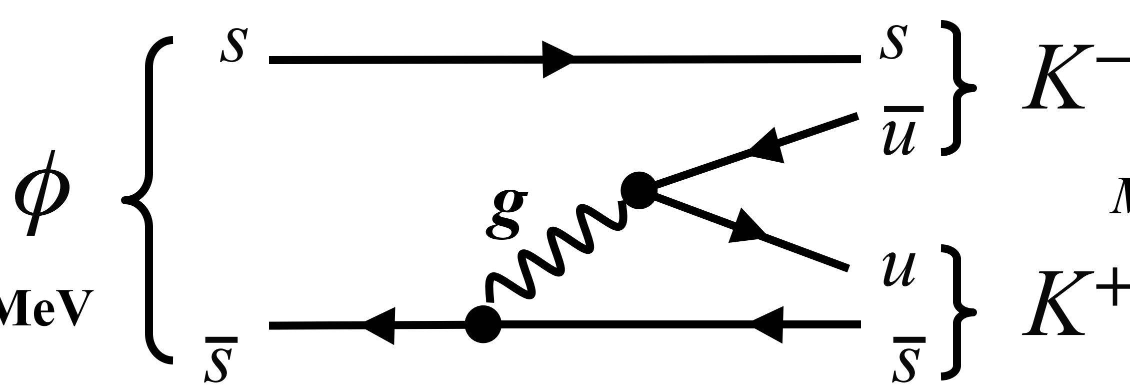
Quark e leptoni (e,μ,τ,ν)
+ $W^{\pm}$, Z^0

interazione **forte**



Quark (u,d,s,c,b,t)
+ gluoni

Decadimento $\phi \rightarrow K^+K^-$ (interazione forte)



M_ϕ **= 1019.5 MeV**

M_K **= 493. 7 MeV**

Decadimento dei mesoni K^+ e K^-

I decadimenti del K avvengono per effetto dell'interazione debole in un tempo $\tau = 1.2 \times 10^{-8}$ s; **scopo della nostra esercitazione è l'identificazione dei decadimenti a due corpi**

Decadimenti del K^+

Modo	Prob (%)
$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$	**63.43**
$K^+ \to \pi^+\pi^0$	**21.13**
$K^+ \to$ 3 corpi	15.44

105. 7 MeV

~ 0

$$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$$

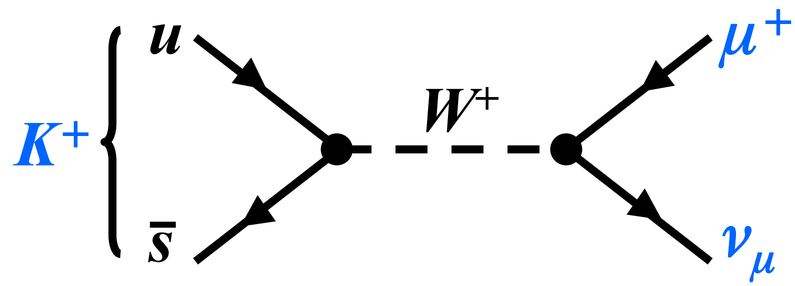
493. 7 MeV

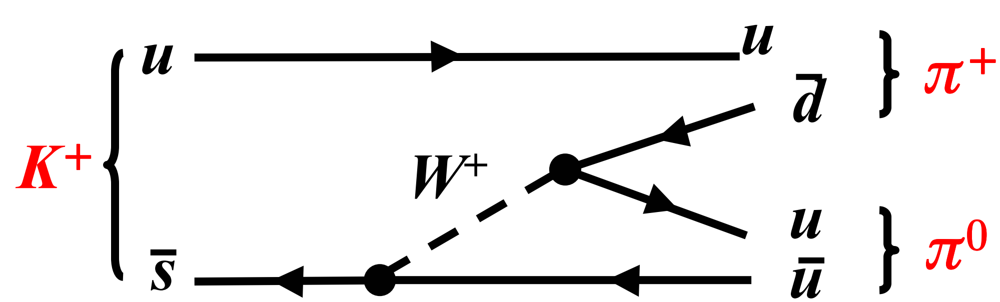
139.7 MeV

135 MeV

$$K^+ \to \pi^+\pi^0$$

$$\pi^0 \to \gamma\gamma$$

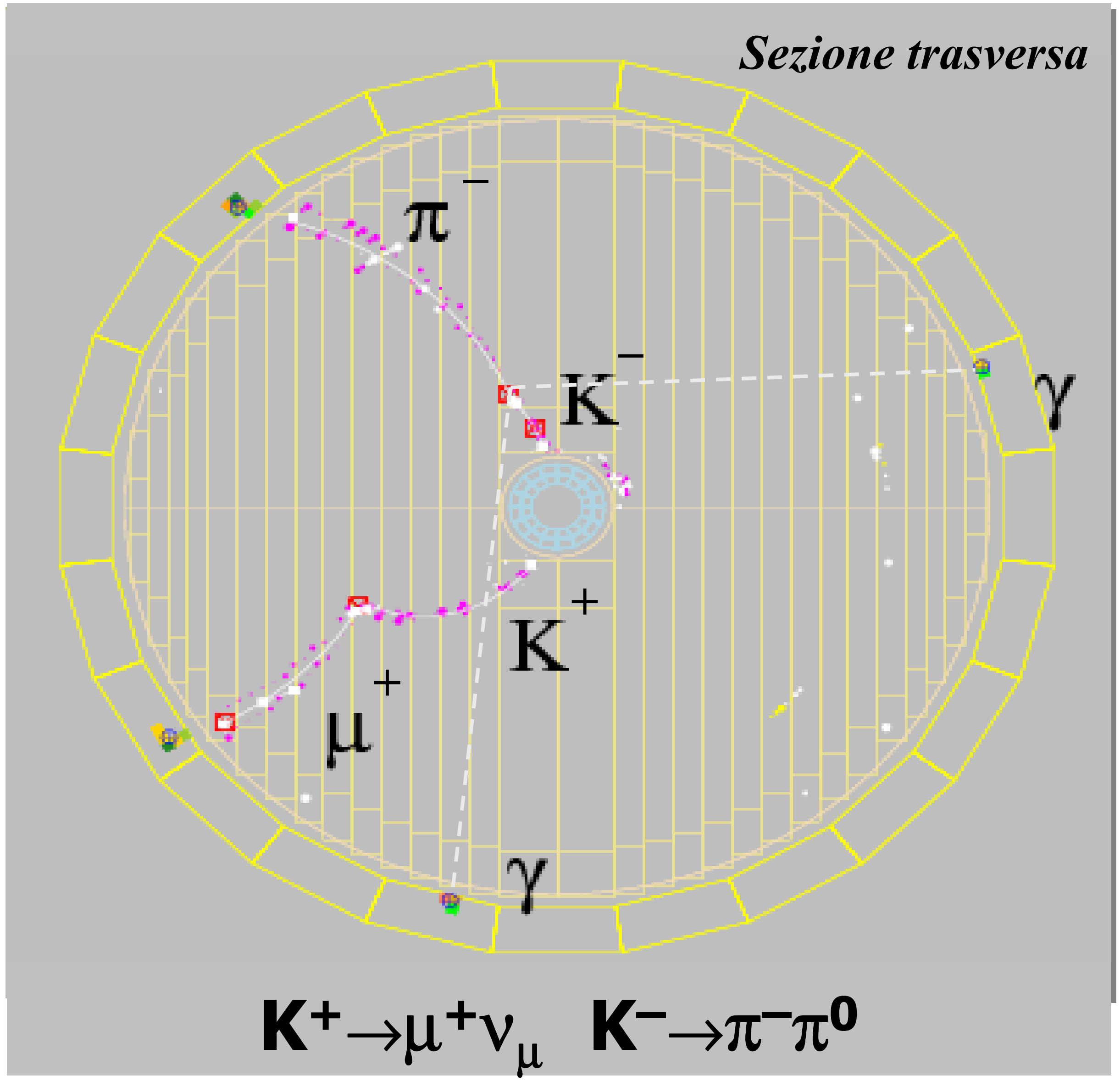




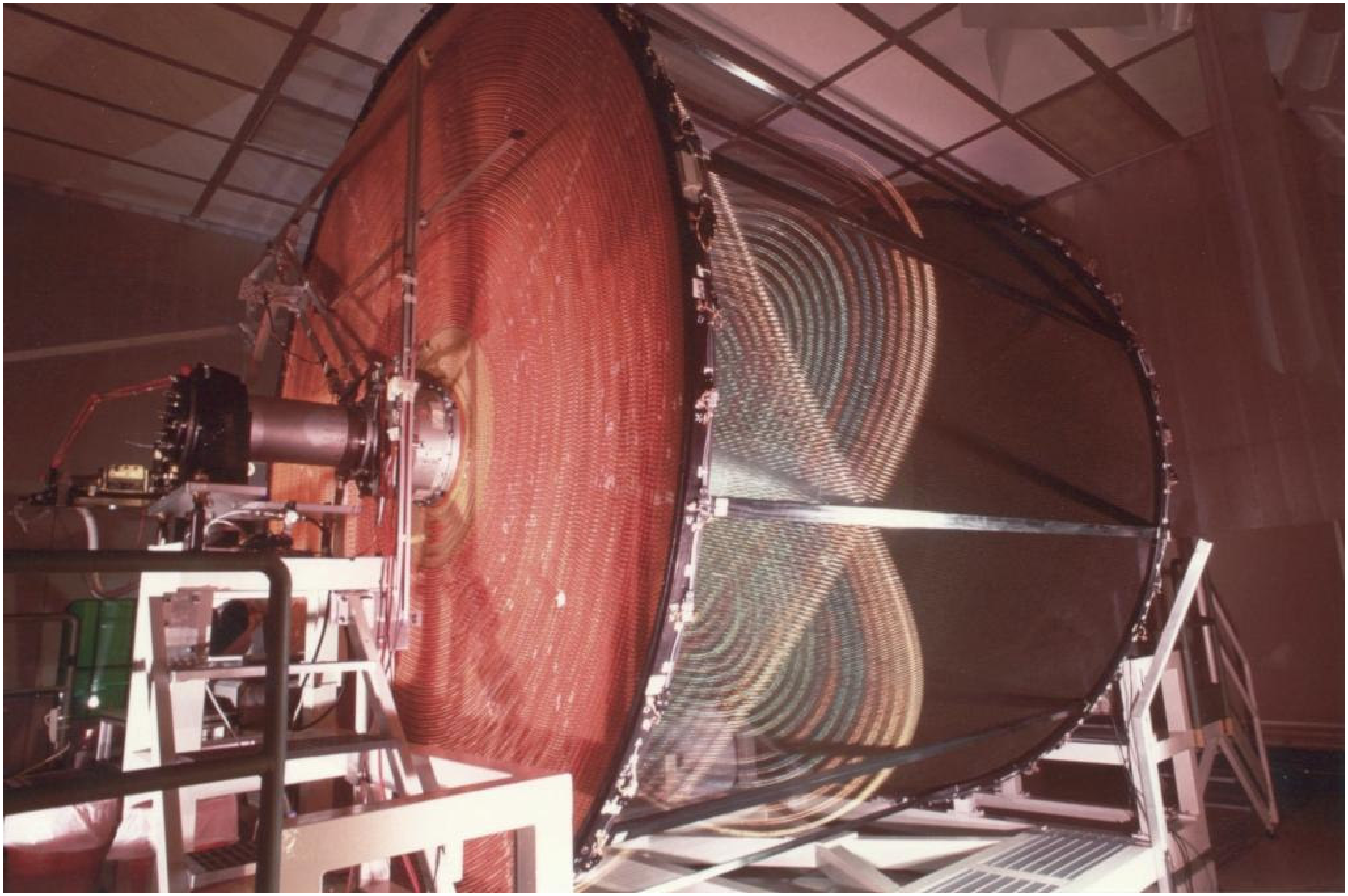
Evento $\phi \rightarrow K^+ K^- \rightarrow \mu^+\nu_\mu \quad \pi^-\pi^0$ in KLOE

1) Le particelle cariche vengono "tracciate" nella zona centrale del rivelatore (***camera a deriva***).

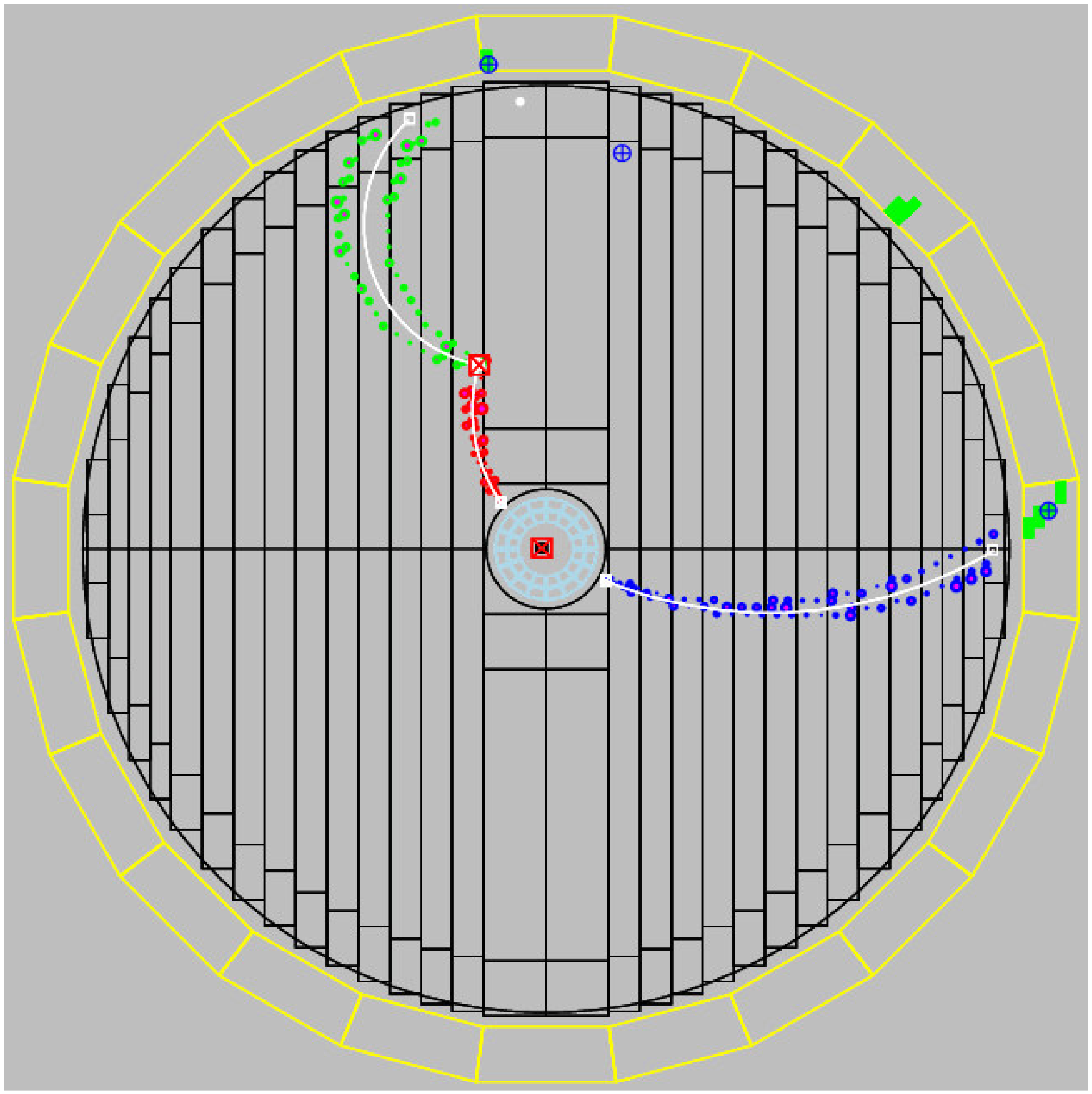
2) L'involucro esterno (***calorimetro***) misura l'energia rilasciata dalle particelle (neutre e cariche), e il tempo.



La camera a deriva di KLOE



Tracciamento di particelle cariche

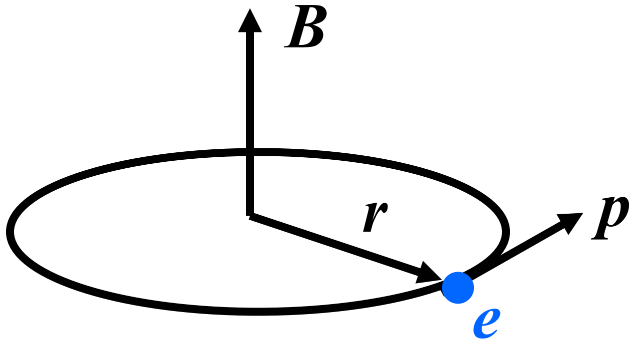


1. Si ricostruiscono i raggi di deriva dei fili colpiti (gli *hits*) in base ai relativi tempi

2. Si raccolgono gli *hits* che appartengono alle stesse tracce in *pattern*

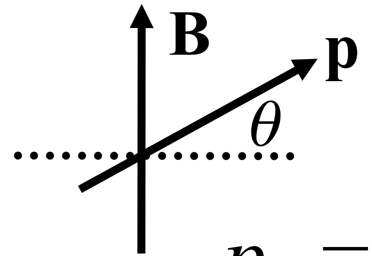
3. Si disegnano le tracce e si individuano i vertici.

Ricostruzione dell'impulso

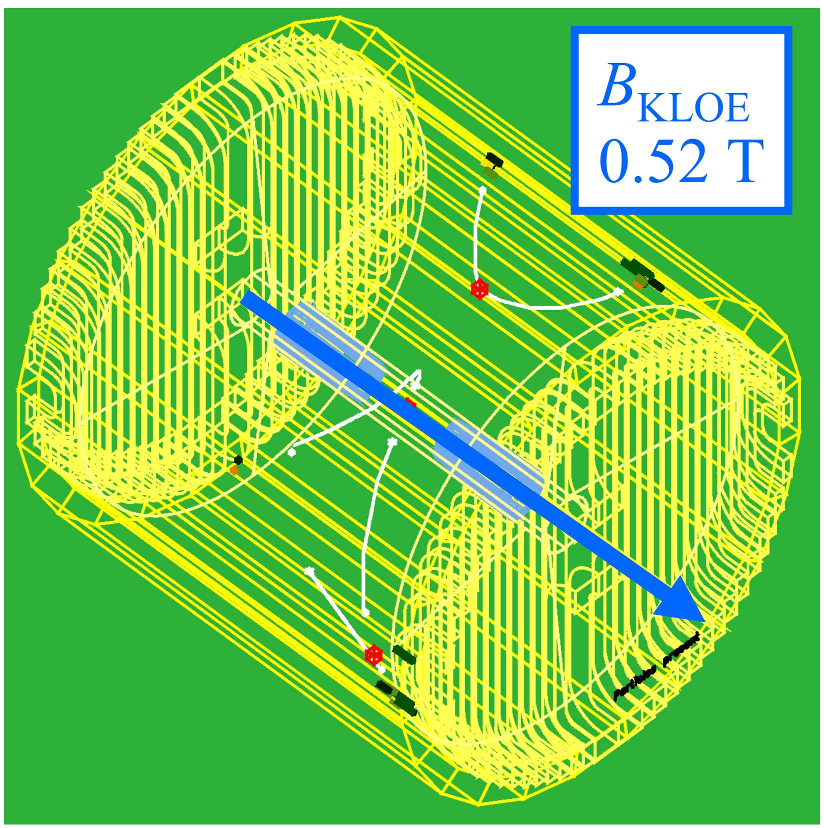


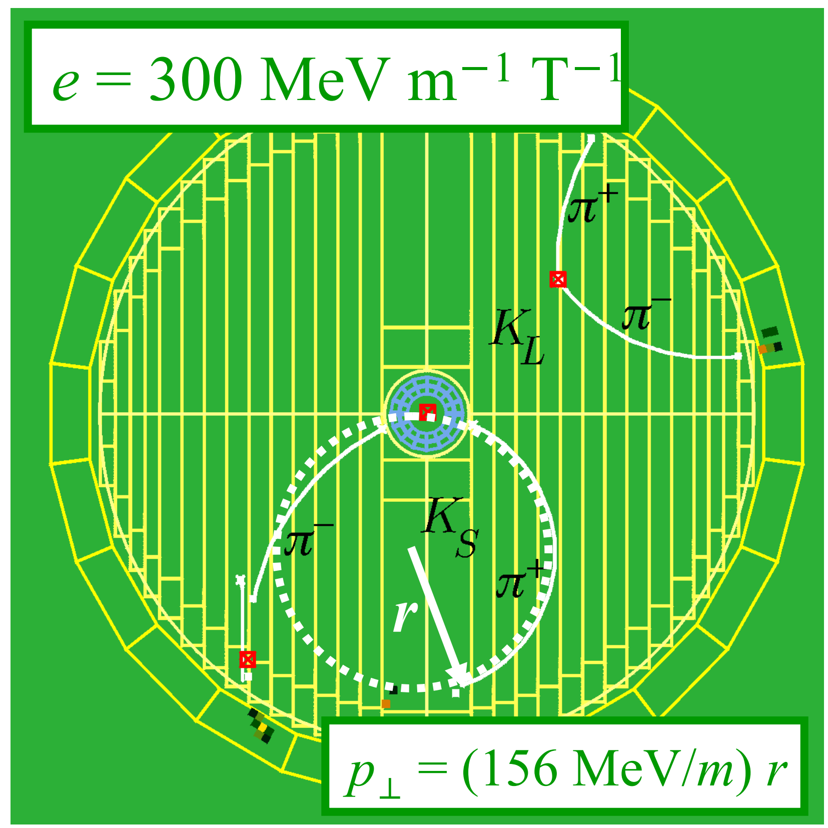
$$F_{\mathrm{acc}} = mv^2/r$$
$$F_B = evB$$

$$p_\perp = erB$$

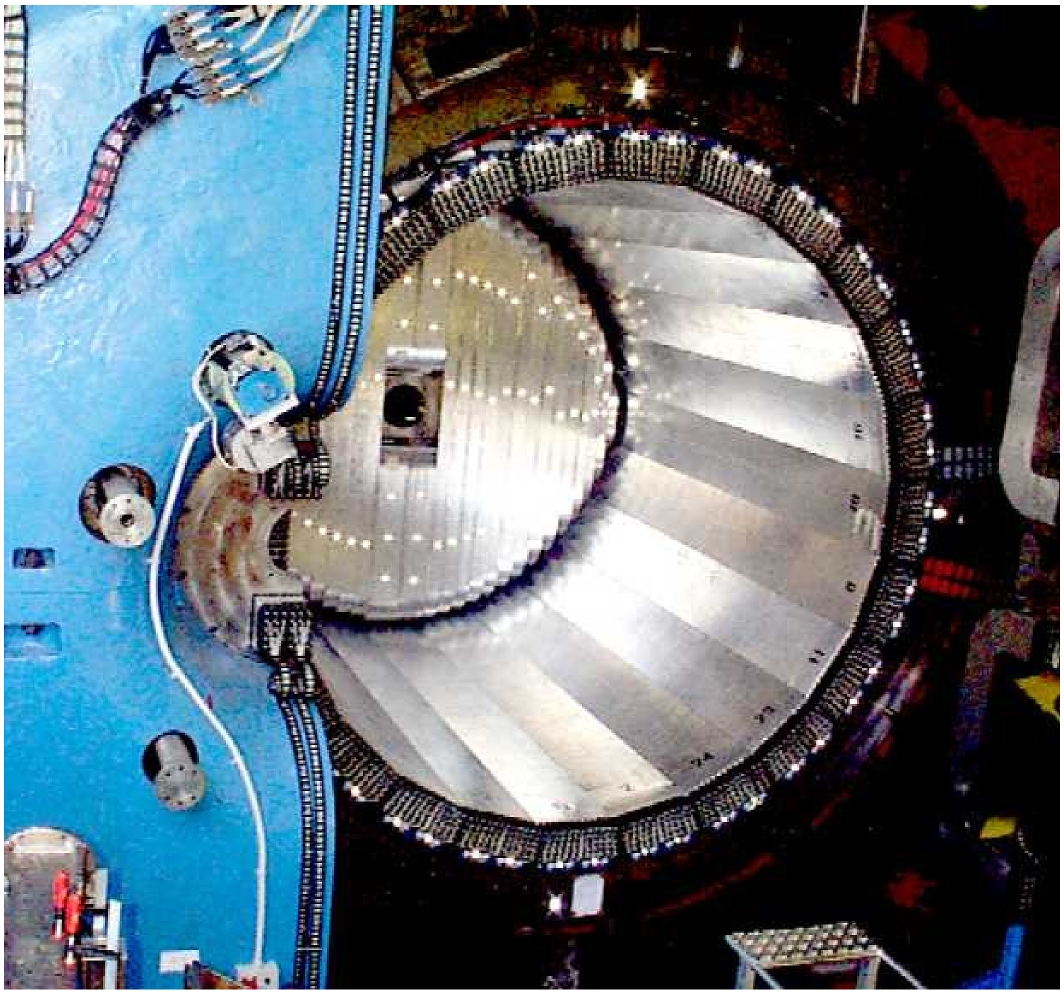


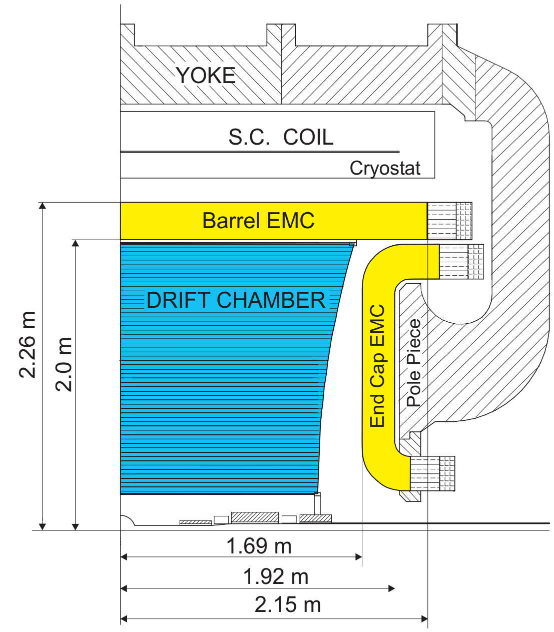
$$p_{\mathrm{L}} = p_\perp \tan\theta$$





Il calorimetro KLOE



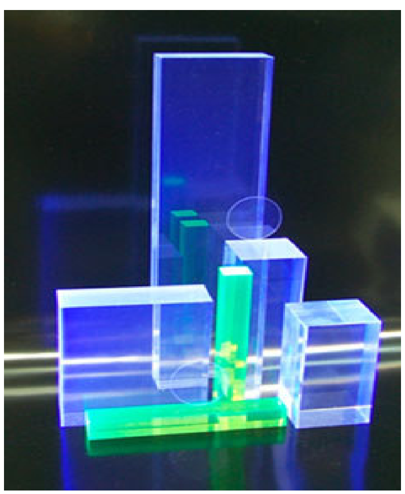


Calorimetri elettromagnetici: un esempio

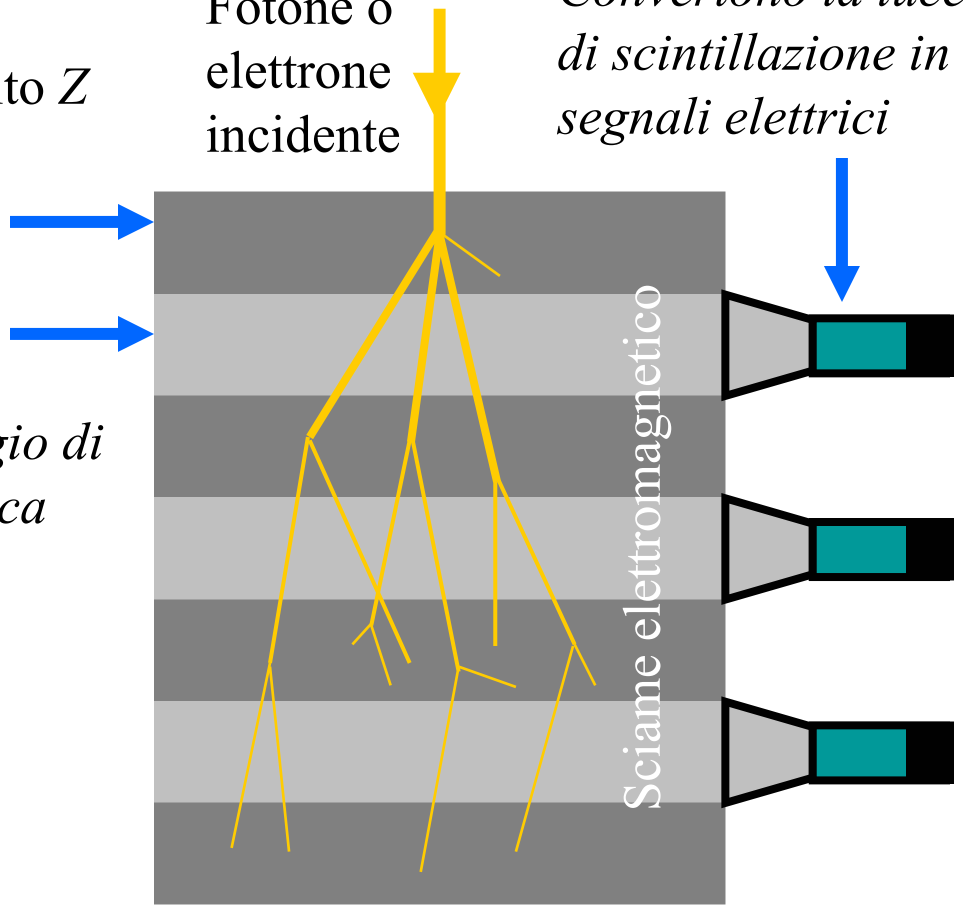
Calorimetro eterogeneo a strati di assorbitore/scintillatore

Assorbitore
Materiale denso, alto Z
Fe, Pb, ecc.
Provoca lo sciame

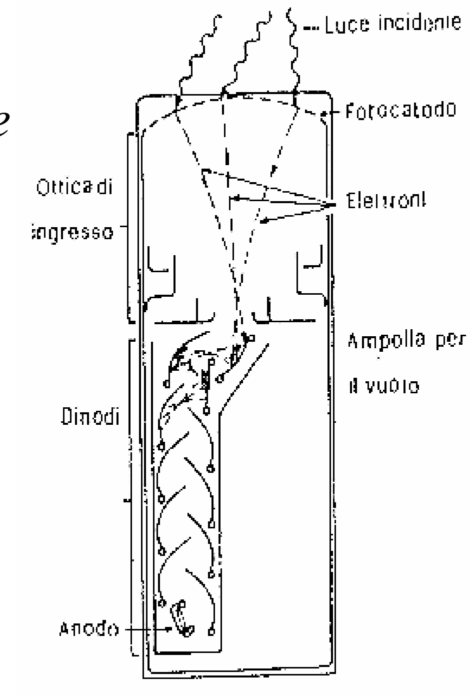
Scintillatore
Polistirene drogato
Dà luce al passaggio di una particella carica



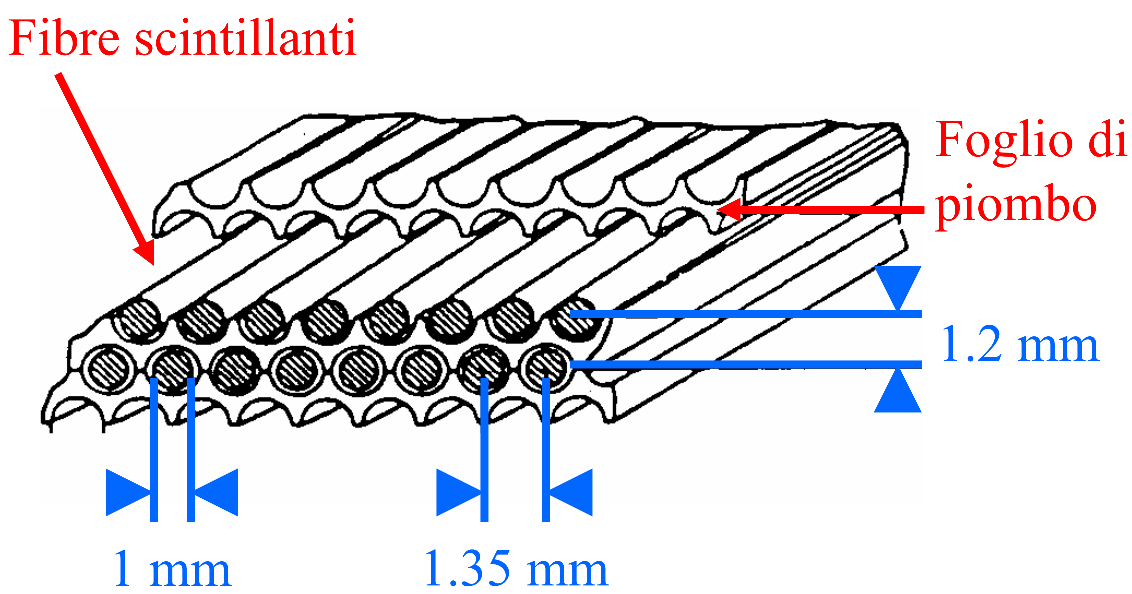
Fotone o elettrone incidente



Fotomoltiplicatori (PMT)
Convertono la luce di scintillazione in segnali elettrici



Il calorimetro KLOE

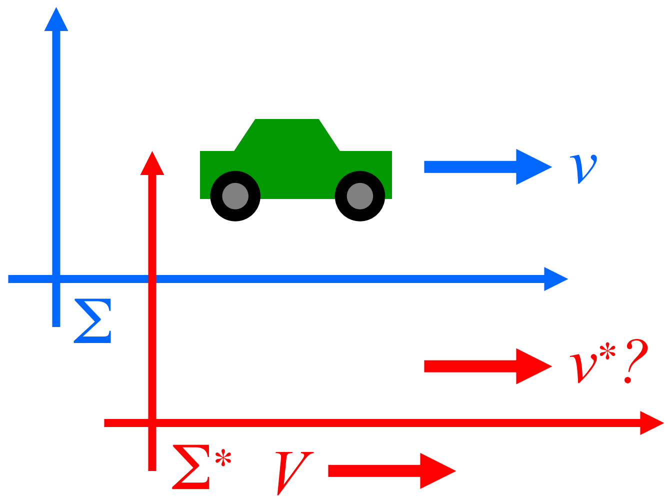


Misura dell'energia: $\sigma_E/E = 5.7\%/\sqrt{E}$

Misura del tempo: $\sigma_t = (57/\sqrt{E} \oplus 150)$ ps

(E in GeV)

Cinematica: trasformazione di Galileo



Quale è la velocità della macchina nel sistema Σ*?

$$v^* = v - V$$

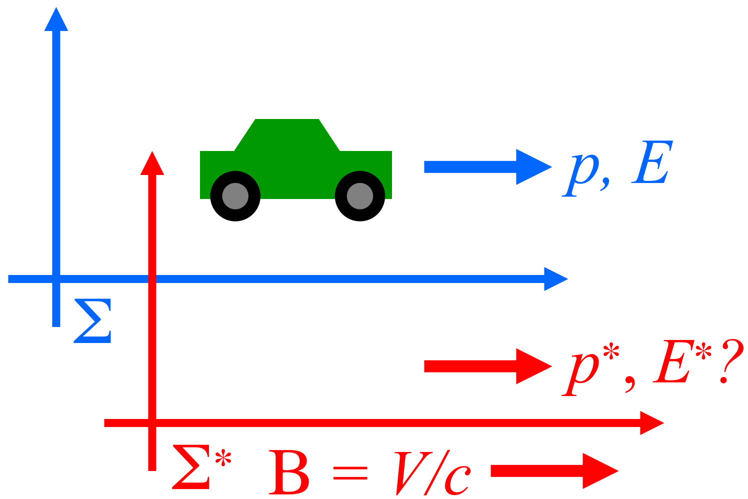
Impulso: $p = mv$

$$p^* = mv^* = m(v - V)$$

Energia cinetica: $T = mv^2/2$

$$T^* = mv^{*2}/2 = m(v - V)^2$$

Cinematica: trasformazione di Lorentz



$$\beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Sistema Σ:

Energia	E
Impulso	p
Velocità	$\beta = p/E$

Sistema Σ^*:

Energia	$E^* = \Gamma(E - \mathrm{B}p)$
Impulso	$p^* = \Gamma(p - \mathrm{B}E)$
Velocità	$\beta^* = p^*/E^* = \dfrac{\beta - \mathrm{B}}{1 - \beta\mathrm{B}}$

Relatività ristretta: energia e impulso

<u>Classica:</u>

$p = mv$

$T = mv^2/2$

<u>Relativistica:</u>

$p = \gamma\beta mc$

$E = \gamma mc^2$

Se: $\beta = 0$
($\gamma = 1$)

$\boldsymbol{p = 0}$

$\boldsymbol{E = mc^2}$

Si può verificare:

$$E^2 - p^2c^2 = [\cancelto{1}{\gamma^2 - (\gamma\beta)^2}]m^2c^4 = m^2c^4$$

Da cui, ponendo c=1, si ricava:

$$\boldsymbol{E^2 = \overbrace{p^2}^{\text{Energia dall'impulso}} + \underbrace{m^2}_{\text{Energia da fermo}}}$$

Vettori

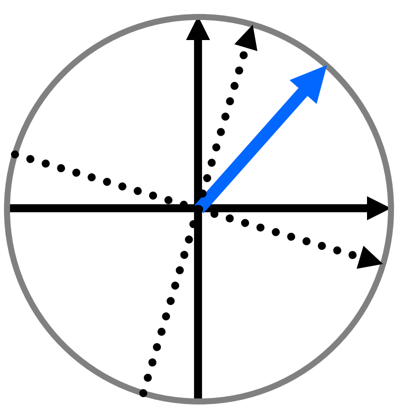
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare:

$$\mathbf{p}_1 \bullet \mathbf{p}_2 = p_{1x}p_{2x} + p_{1y}p_{2y} + p_{1z}p_{2z}$$

Modulo:

$$\mathbf{p} \bullet \mathbf{p} = \mathbf{p}^2 = |p|^2$$



il modulo dell'impulso ha lo stesso valore visto da ogni angolo

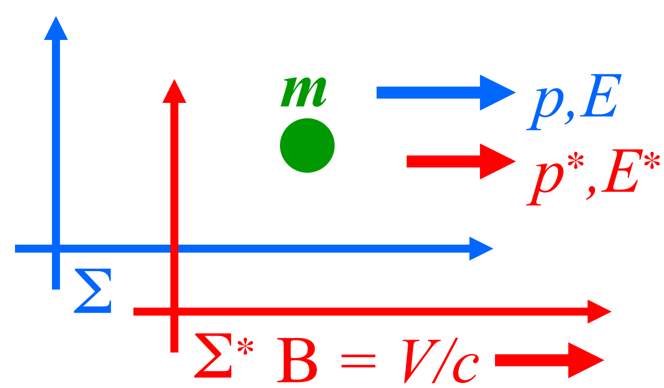
Quadrivettori

$$p = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$p_1 \bullet p_2 = E_1E_2 - p_{1x}p_{2x} - p_{1y}p_{2y} - p_{1z}p_{2z}$$

$$p \bullet p = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

la massa da ferma della particelle ha lo stesso valore in ogni sistema

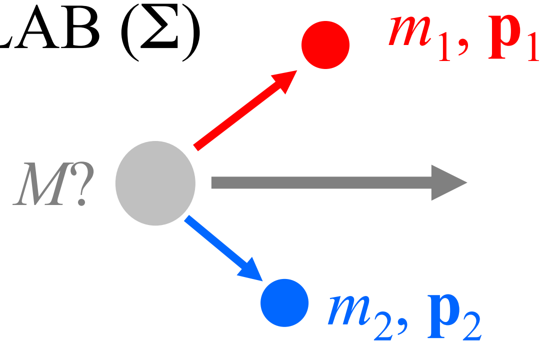


Decadimenti

Energia totale conservata
Impulso conservato componente per componente

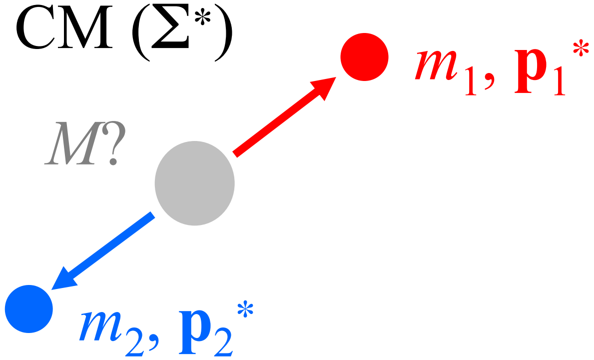
$$\begin{cases} \Sigma\, E_{\mathrm{i}} = \Sigma\, E_{\mathrm{f}} \\ \Sigma\, p_{x\mathrm{i}} = \Sigma\, p_{x\mathrm{f}} \\ \Sigma\, p_{y\mathrm{i}} = \Sigma\, p_{y\mathrm{f}} \\ \Sigma\, p_{z\mathrm{i}} = \Sigma\, p_{z\mathrm{f}} \end{cases}$$

LAB (Σ)



Quanta massa ha la particella che decade?
E' facile da calcolare nel CM:

CM (Σ^*)



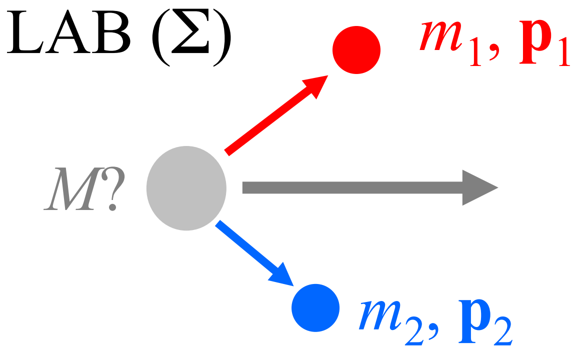
$$E_{\mathrm{i}} = M \qquad E_{\mathrm{f}} = E_1^* + E_2^*$$

$$\mathbf{p}_{\mathrm{i}} = 0 \qquad \mathbf{p}_1^* = -\mathbf{p}_2^* = \mathbf{p}_{\mathrm{f}}^*$$

$$(p_1^* + p_2^*)_{x,y,z} = 0$$

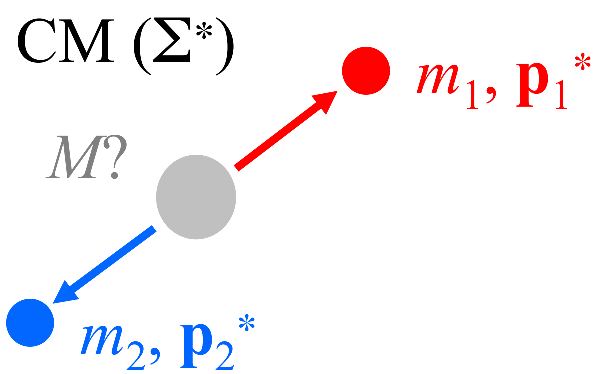
$$E_1^* + E_2^* = M$$

La massa invariante



Possiamo anche usare quadrivettori:
Definiamo $P^* = (p_1^* + p_2^*)$

$$P^{*2} = (E_1^* + E_2^*)^2 - (\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*)^2 = M^2$$



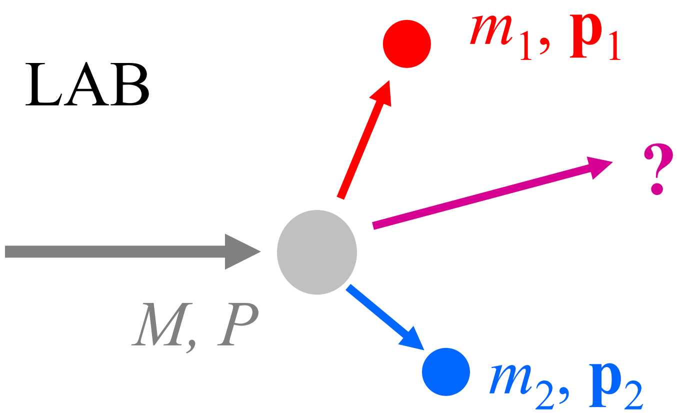
Se conosciamo solo $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ nel LAB?
Possiamo trasformare $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_1^*$, $\mathbf{p}_2^*$
Troppo complesso!

Usiamo il prodotto scalare, che può essere valutato sia nel CM che nel LAB:

$$\underbrace{P^{*2}}_{\text{Calcolato nel CM}} = M^2 = \underbrace{(p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}_{\text{Calcolato nel LAB}}$$

Massa invariante: $M^2 = (\Sigma E)^2 - (\Sigma \text{p})^2$

La massa mancante



A volte non è possibile osservare tutti i prodotti del decadimento

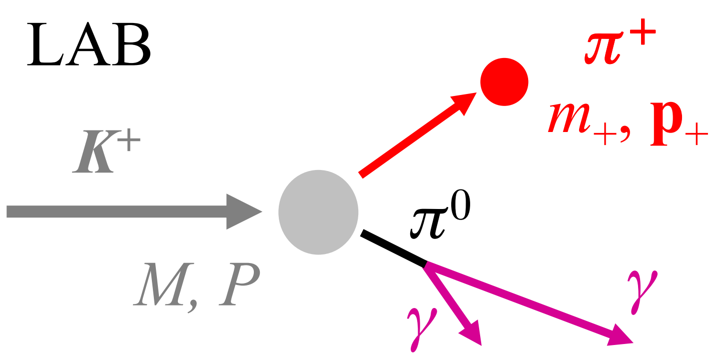
$$(\Sigma\, p)_\mathrm{i} = (\Sigma\, p)_\mathrm{f} \qquad p_?^{\,2} = (P - p_1 - p_2)^2$$

$$P = p_1 + p_2 + p_?$$

$m_?^{\,2}$

Massa mancante: $$M_?^{\,2} = (\Sigma\, P_\mathrm{i} - \Sigma\, P_\mathrm{f})^2$$
$$= (\Sigma\, E_\mathrm{i} - \Sigma\, E_\mathrm{f})^2 - (\Sigma\, \mathbf{p}_\mathrm{i} - \Sigma\, \mathbf{p}_\mathrm{f})^2$$

Esempio: $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$
$\hookrightarrow \gamma\gamma$



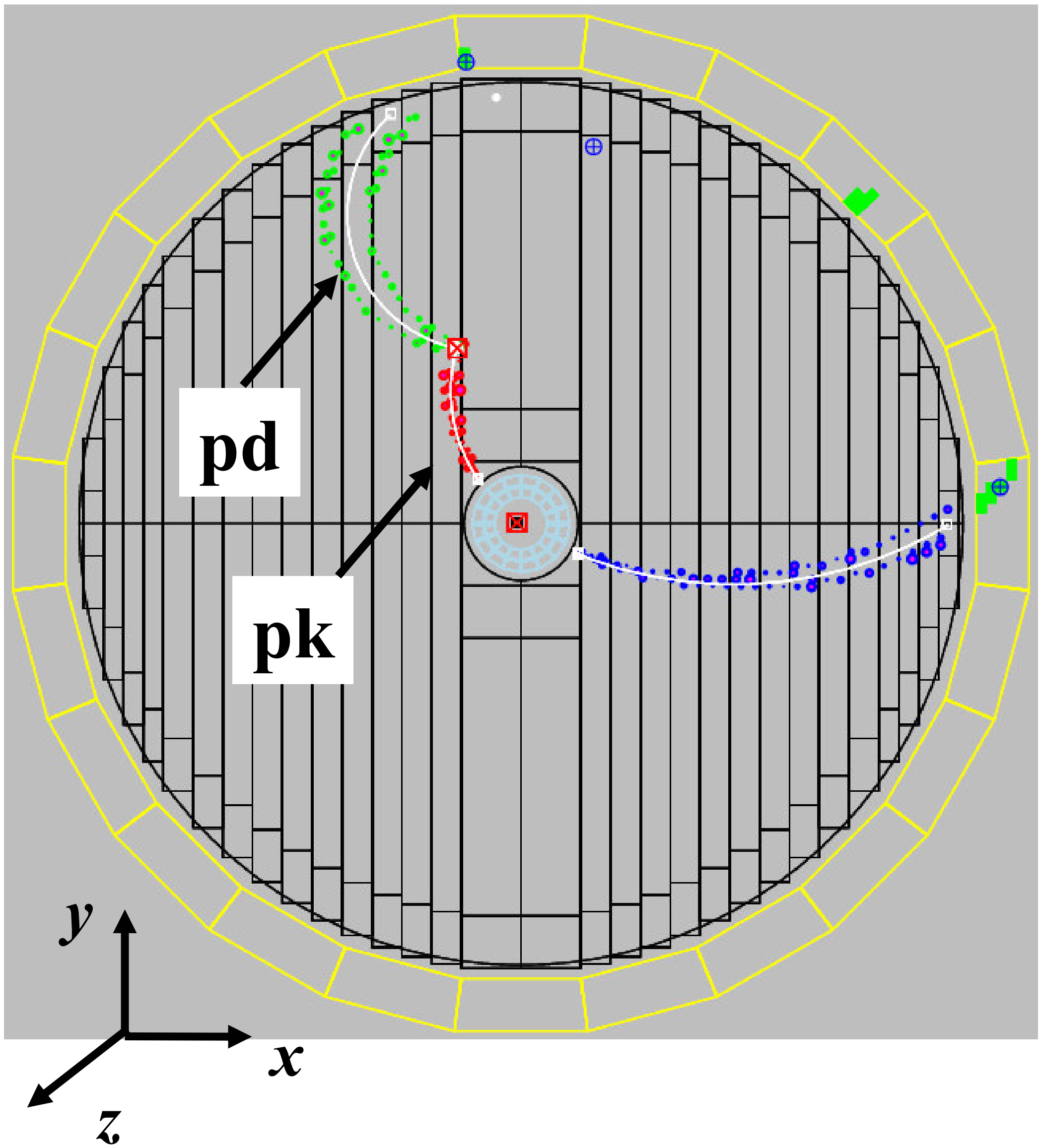
1. Assumiamo di non vedere i fotoni:
   Quale è la massa del π^0?

$$m_0^{\,2} = p_0^{\,2} = (P - p_+)^2$$

2. Assumiamo di vedere solo i fotoni:
   Quale è la massa del π^0?

$$p_0^{\,2} = (p_1 + p_2)^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta_{12})$$

Il campione dei dati

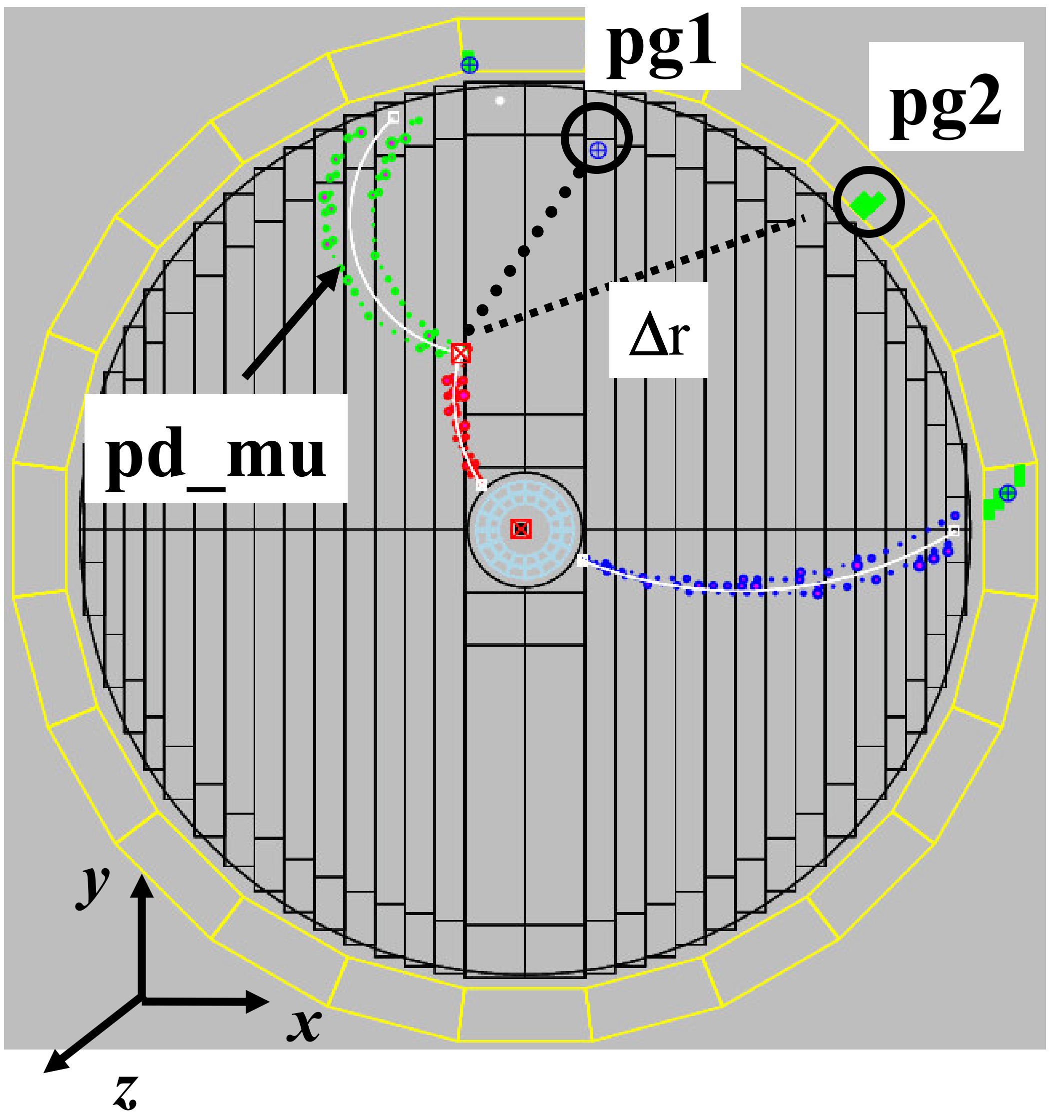


1) Ogni ***evento*** selezionato ha 2 mesoni K carichi prodotti da un decadimento della ϕ .
2) Nell'85% dei casi, il mesone K^+ decade in $\mu^+\nu$ ***oppure*** in $\pi^+\pi^0$.
3) Nel campione di dati da analizzare troveremo, ***per ogni evento***, i parametri misurati dal rivelatore relativamente ***ad uno solo*** degli emisferi dell'evento (K^+ o K^-):

- pk(3) componenti x,y,z dell'impulso del K

- pd(3) componenti x,y,z dell'impulso della ***particella carica figlia del K***

Il campione dei dati (2)



- pd_mu(3), pd_pi(3)

componenti x,y,z dell'impulso della particella figlia (che il piu' delle volte e' un π carico o un μ) nel sistema di riferimento del K, che si muove nel LAB con velocità $\beta_K\, c = |p_K|/E_K$; nel calcolo della TL ($p^* = \Gamma(p - BE)$), con $E=(p^2+m^2)^{1/2}$ sono tentate due ipotesi di massa per la particella figlia: m_μ e m_π .

- pg1(3), pg2(3)

componenti x,y,z dell'impulso delle due particelle neutre (***se esistono***) compatibili con l'essere fotoni provenienti dal vertice di decadimento del K carico ($\Delta t=\Delta r/c$)

1) Calcolare il modulo dell'impulso del K nel LAB:

$$|\mathbf{pk}| = \mathrm{sqrt}(pk(1)^{**}2+pk(2)^{**}2+pk(3)^{**}2)$$

2) Calcolare il modulo dell'impulso della particella figlia nel LAB e nel sistema di quiete (CM) del K:

$|\mathbf{pd}| = \mathrm{sqrt}(pd(1)^{**}2+pd(2)^{**}2+pd(3)^{**}2)$; $|\mathbf{pd\_mu}|$ = …..

E' possibile utilizzare questi spettri di impulso per identificare i decadimenti $K^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}\, \nu$ e $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\, \pi^{0}$?

3) Calcolare la massa mancante al vertice di decadimento del K, e confrontarla con quanto ci aspettiamo per la massa della particella figlia neutra nei decadimenti $K^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}\, \nu$ e $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\, \pi^{0}$:

$$M^2_{miss} = (Ek-Ed)^{**}2 - \Sigma_{i=1,3}\, (pk(i)-pd(i))^{**}2$$

E' necessaria un'ipotesi di massa per la particella figlia?

4) Calcolare la massa invariante dei fotoni (se presenti) provenienti dal vertice di decadimento del K e verificare che essa sia compatibile con la massa del π^0:

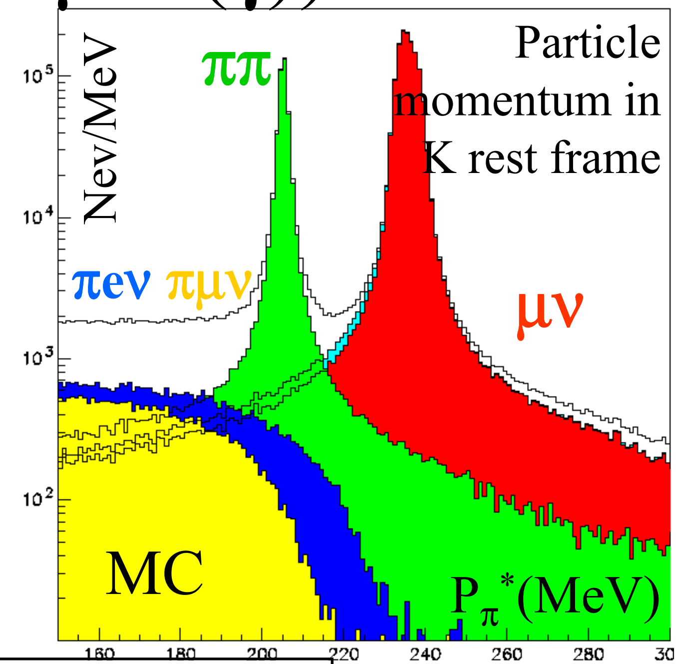
$$m_{\gamma\gamma} = \mathrm{sqrt}(2E_1E_2(1 - \cos\theta_{12}))$$
$$E1 = |\mathbf{pg1}| = \mathrm{sqrt}(pg(1)**2+pg(2)**2+pg(3)**2)$$
$$\cos\theta_{12} = \mathbf{pg1} \bullet \mathbf{pg2}/(|\mathbf{pg1}|\,|\mathbf{pg2}|)$$

5) Confrontare la massa invariante dei fotoni con la misura di massa mancante al vertice.

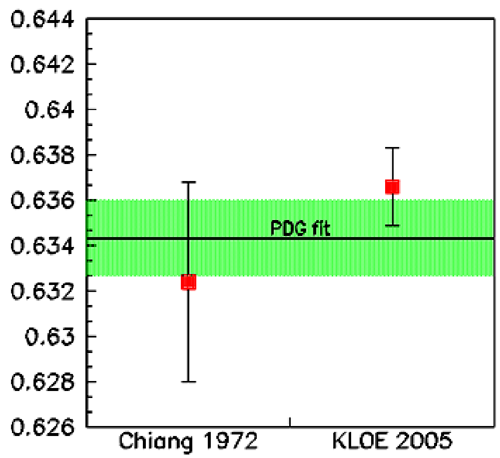
6) Calcolare la massa invariante del mesone K a partire dagli impulsi dei prodotti di decadimento del K stesso

Vus from BR($K^+ \to \mu^+\nu(\gamma)$)

- Tag from $K^- \to \mu^-\nu$; to reduce the tag bias, tag selection requires EMC trigger.
- 2002 data set: 1/3 used for signal selection, 2/3 used as efficiency sample
- Count events in (225,400) MeV p_π^* window after the subtraction of π^0 identified background.
- Selection efficiency measured on data.
- Radiated γ acceptance measured on MC.



$$BR(K^+ \to \mu^+\nu(\gamma)) = 0.6366 \pm 0.0009_{stat.} \pm 0.0015_{syst.}$$

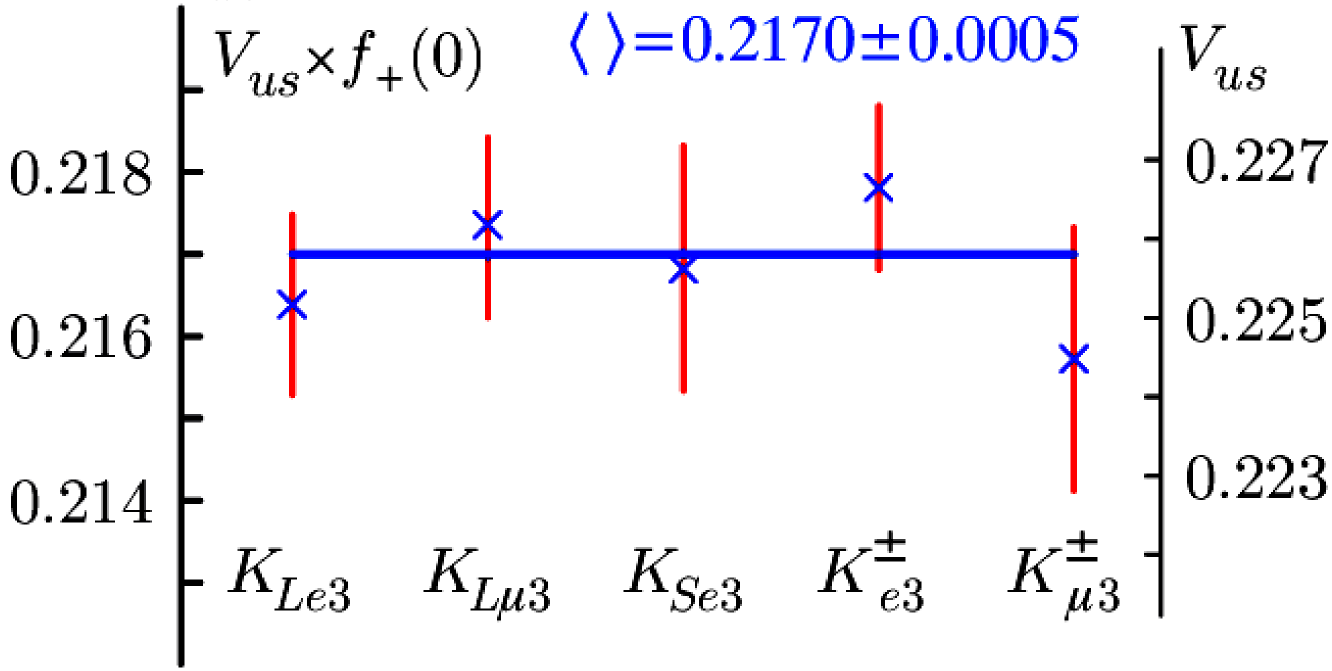


Following Marciano hep-ph/0406324 :

- $\Gamma(K\to\mu\nu(\gamma))/\Gamma(\pi\to\mu\nu(\gamma)) \propto |V_{us}|^2/|V_{ud}|^2 f_K^2/f_\pi^2$
- From lattice calculations: $f_K/f_\pi = 1.210 \pm 0.014$ (MILC Coll. hep-lat/0407028)
- $V_{ud} = 0.9740 \pm 0.0005$ (superallowed β-decays)

$$\boxed{V_{us} = 0.2223 \pm 0.0025 \text{ KLOE preliminary}}$$

V_{us} at KLOE



Using:

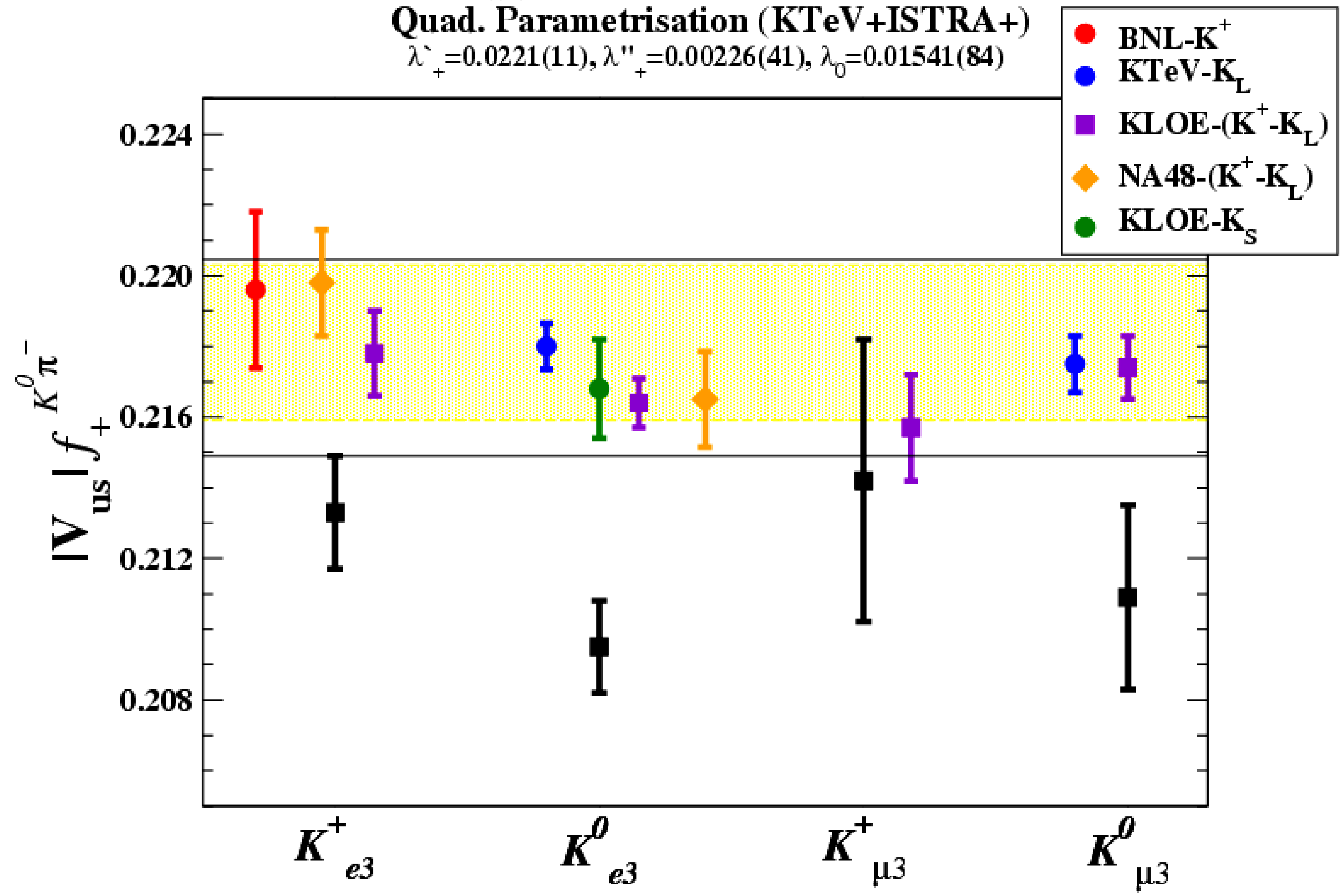
- $f_+(0) = 0.961(8)$ from Leutwyler and Roos
- K_L lifetime from KLOE: $\tau_L = 50.84(23)$ ns
- All BR's from KLOE:

	K_Le3	$K_L\mu3$	K_Se3	$K^\pm e3$	$K^\pm\mu3$
BR	0.4007	0.2698	0.00709	0.0505	0.0331
δBR	0.0018	0.0012	0.00009	0.0004	0.0005

Fitting the 5 $|V_{us}f_+(0)|$ KLOE determinations: χ^2/dof=1.7/4

Using also KTeV inputs, $V_{us}f_+(0)$ becomes 0.2172(4)

V_{us} and Unitarity



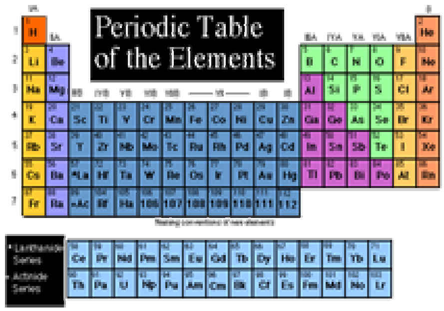
$f_+(0) = 0.961(8)$ from Leutwyler and Roos

K_L lifetime from KLOE: $\tau_L = 50.84(23)$ ns

plot: F.Mescia courtesy

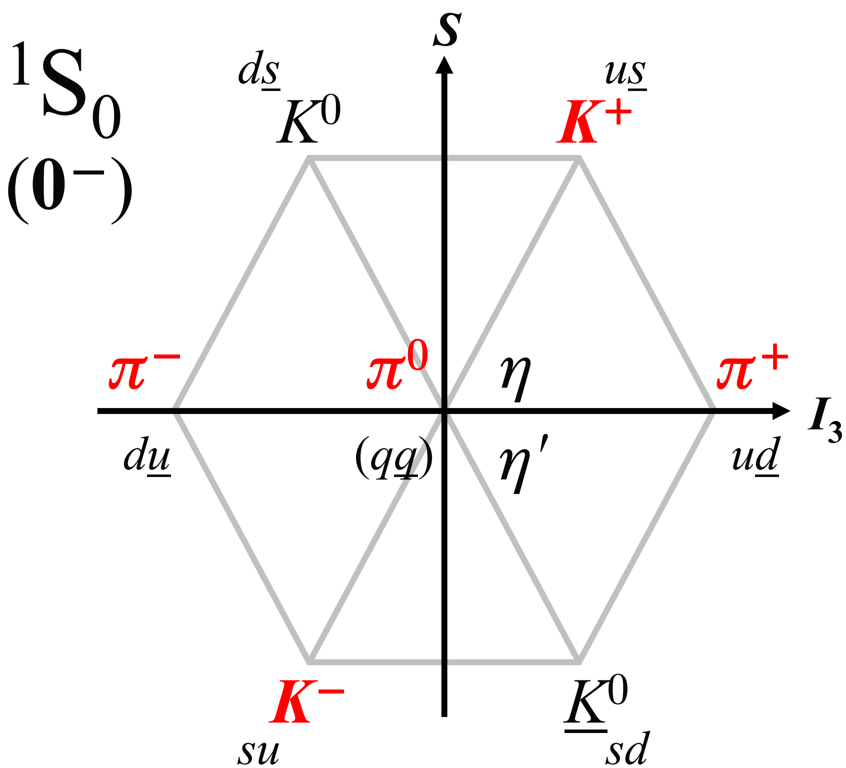
Riserva

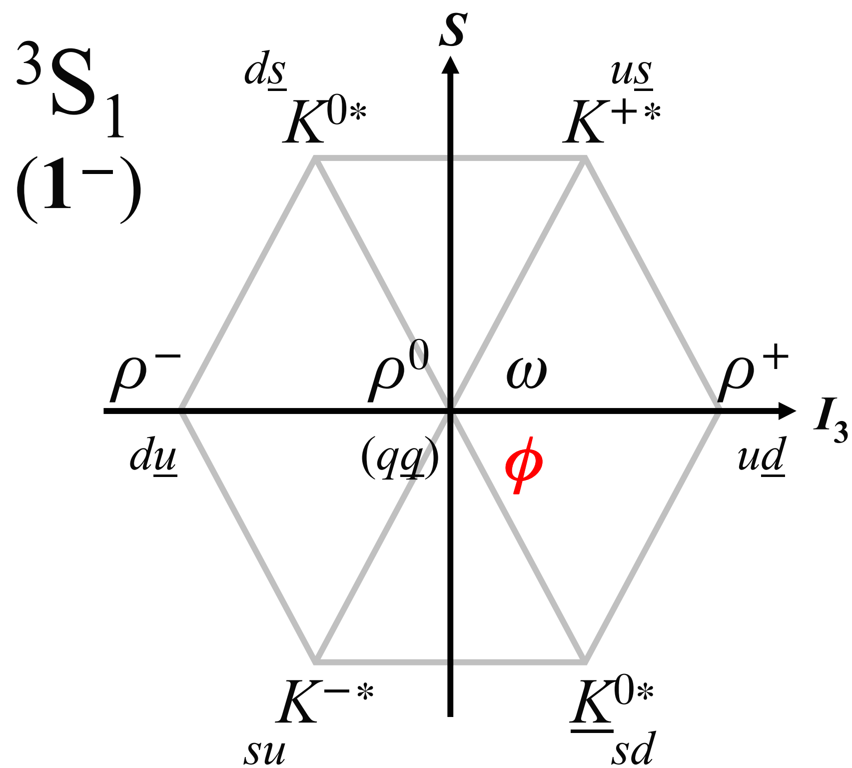
I mesoni e il modello dei quark



Le periodicità delle proprietà chimiche degli elementi portò alla comprensione dei loro costituenti

Lo stesso è accaduto con le particelle elementari





Richiami sul modello standard: materia

i Leptoni

$q = -1$	e	μ	τ
$q = 0$	ν_e	ν_μ	ν_τ

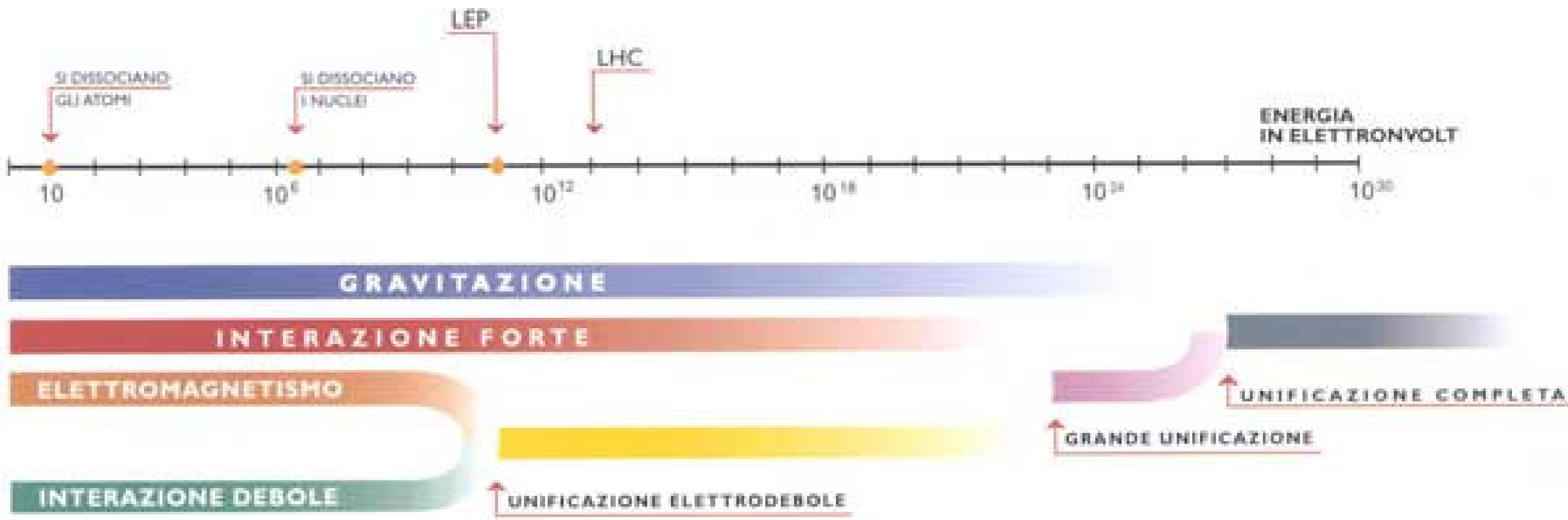
- I leptoni non possiedono colore e quindi non partecipano alle interazioni forti
- I neutrini non hanno carica elettrica e interagiscono soltanto tramite la forza debole

I neutrini hanno massa?

$$\sum_{e\,\mu\,\tau} m_\nu < 2.7 \text{ eV}$$

Limite necessario per spiegare la distribuzione della radiazione di fondo nell'Universo tramite la cosmologia

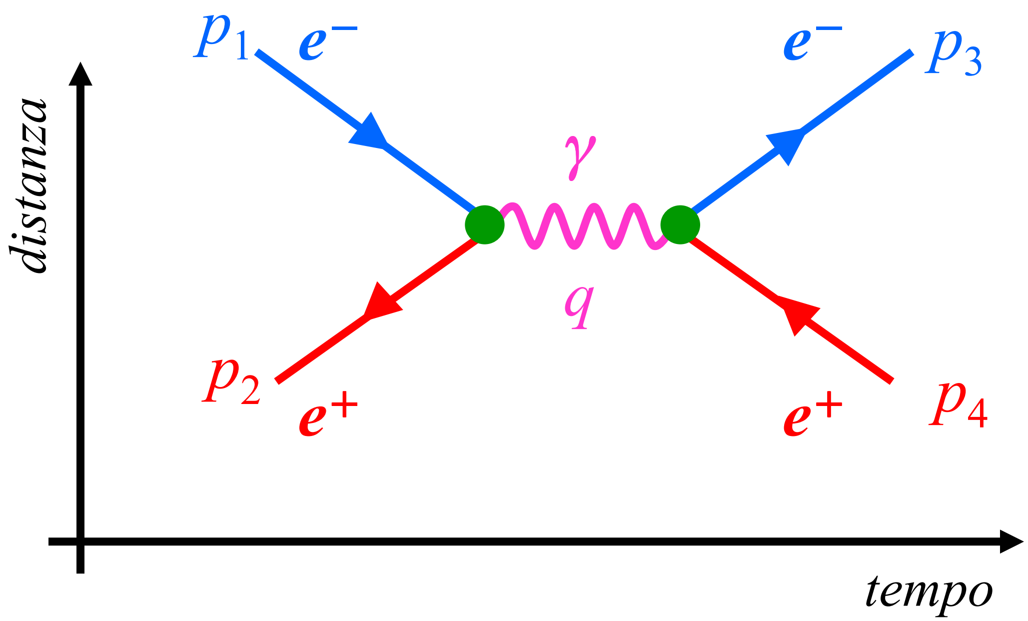
Richiami sul modello standard: forze



Sviluppo cronologico

dell'Universo della fisica

Il modello standard e i grafici di Feynman



Non solo consentono di visualizzare un'interazione

Facilitano anche il calcolo di $\mathcal{M}$:

La probabilità di
- decadimento
- interazione

è proporzionale a $\mathcal{M}^2$

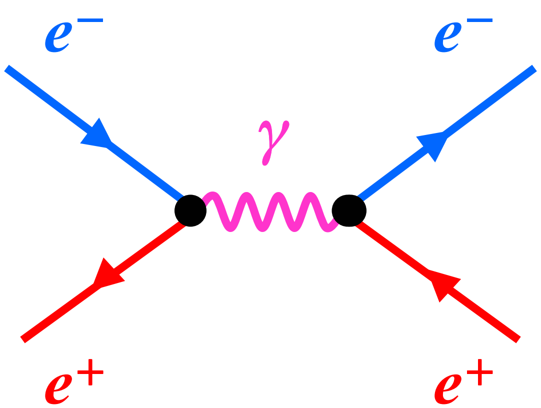
$$\mathcal{M} \propto$$

$$\int [\underline{u}(p_3) i g \gamma^\mu v(p_4)] \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} [\underline{v}(p_2) i g \gamma^\nu u(p_1)] \quad \times$$

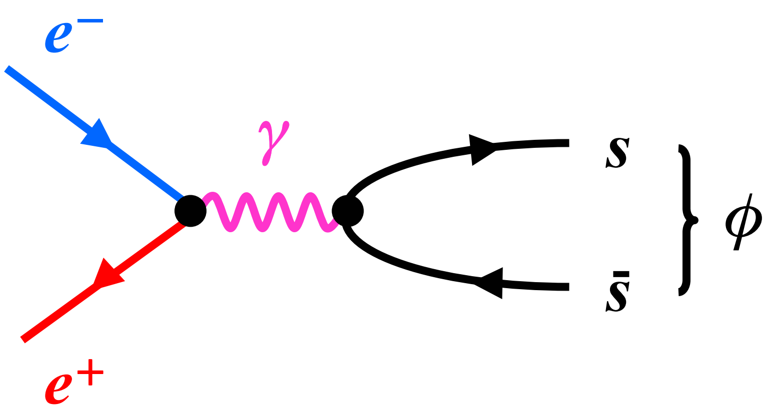
$$\delta^4(p_1 + p_2 - q)\ \delta^4(q - p_3 - p_4)\ d^4q$$

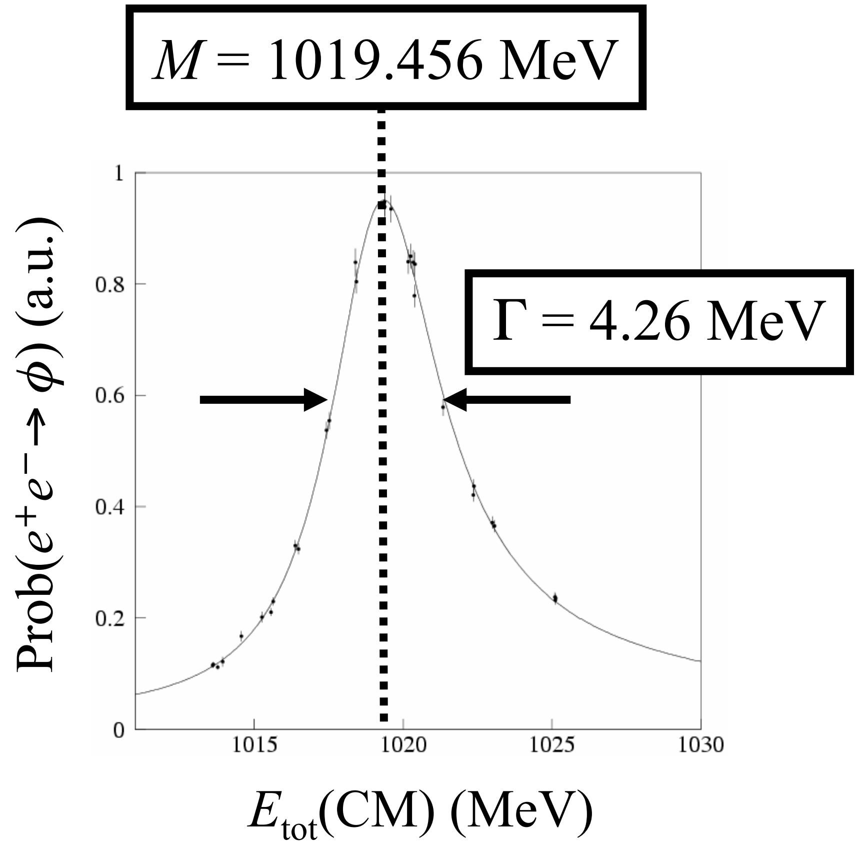
Produzione del mesone ϕ in collisioni e^+e^-

Processo non-risonante
Diffusione Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



Processo risonante
Produzione della ϕ: $e^+e^- \rightarrow \phi$





Vita media:

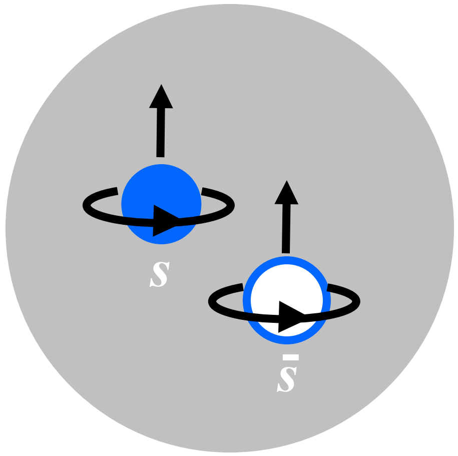
$\tau = \Gamma/\hbar$

$= 47$ fm/c

$= 1.6 \times 10^{-22}$ s

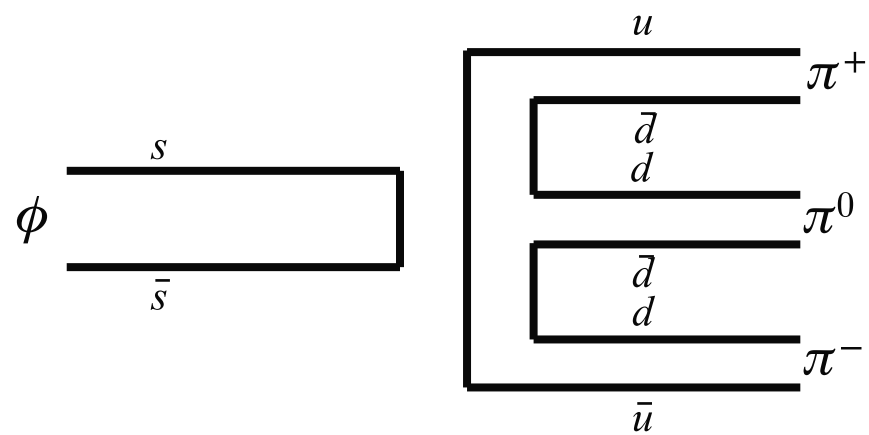
$\hbar = 200$ **MeV·fm/c**
$c = 3 \times 10^{23}$ **fm/s**

Il mesone ϕ



Spin
totale
$J = 1$

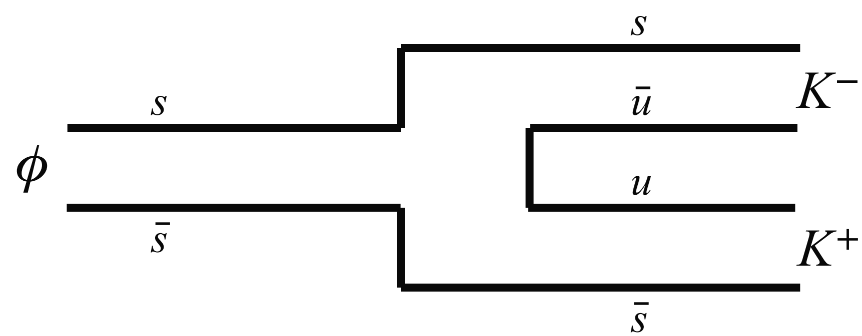
Processo OZI-soppresso:



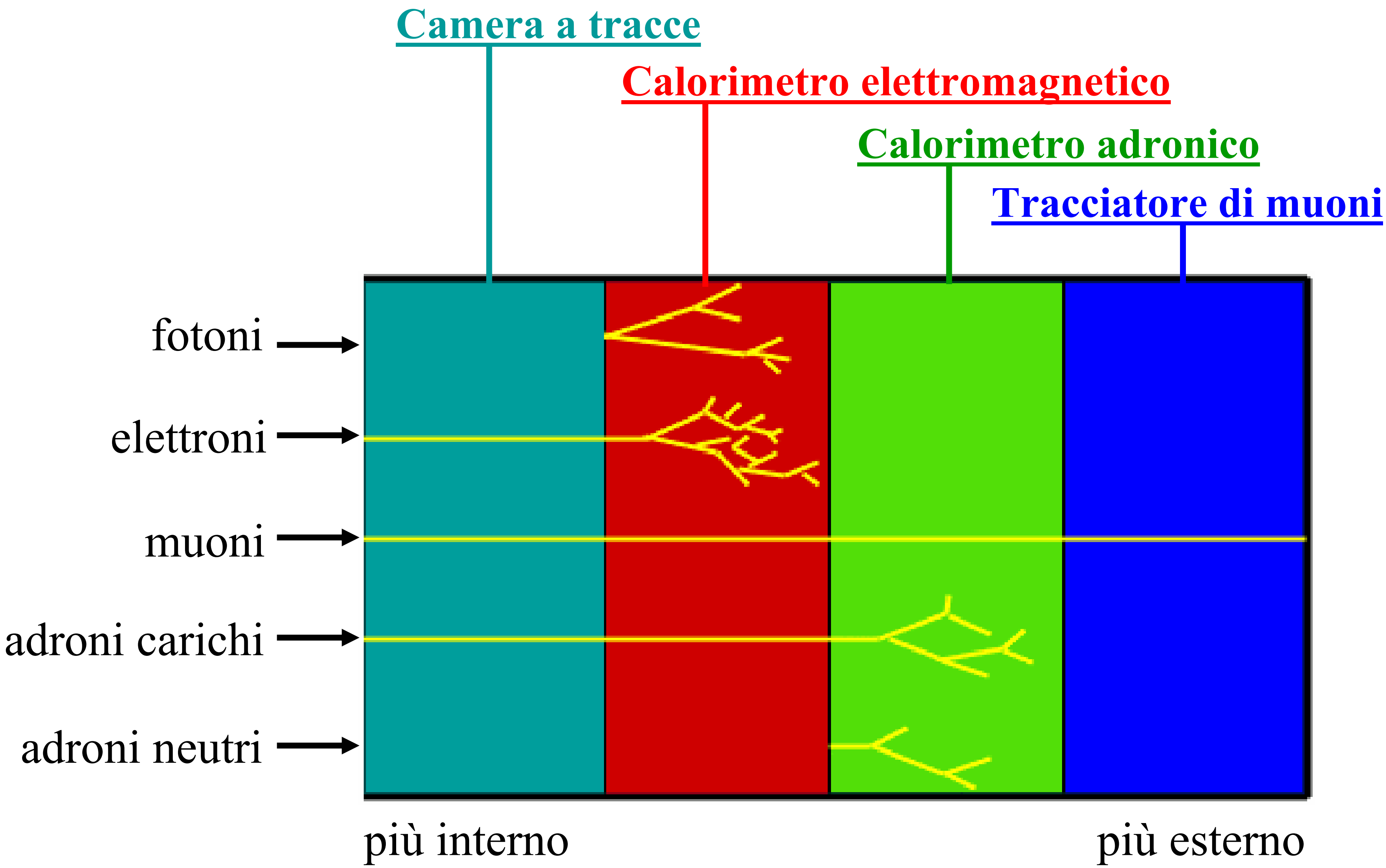
Decadimenti della ϕ

Modo	Prob (%)
$\phi \rightarrow K^+K^-$	**49.1**
$\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0$	34.1
$\phi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	15.5
$\phi \rightarrow e^+e^-$	$3 \cdot 10^{-4}$
$\phi \rightarrow \mu^+\mu^-$	$2.5 \cdot 10^{-4}$

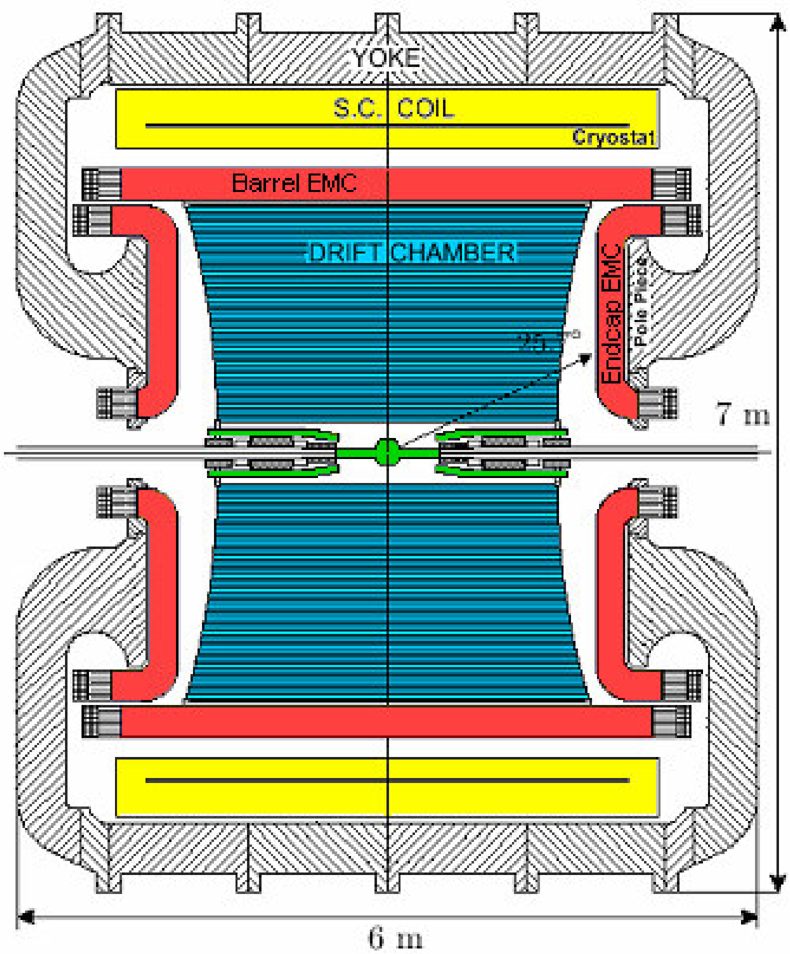
Processo OZI-favorito:



Rivelazione di particelle



L'esperimento KLOE



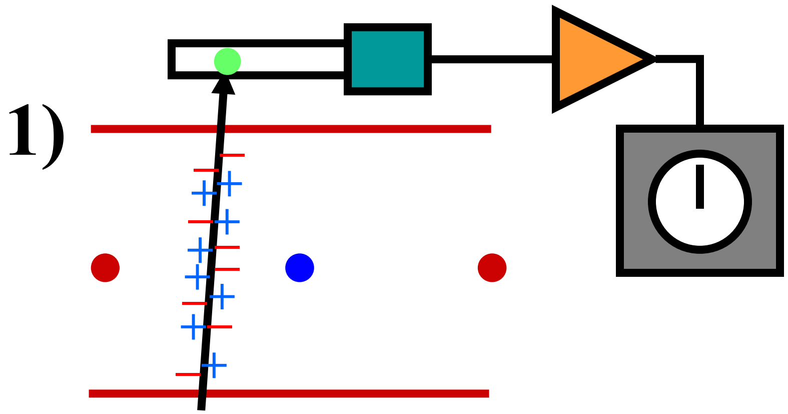
Sezione longitudinale

Camera a deriva
Diametro: 4 m
Lunghezza: 3.3 m
Gas: 90% elio, 10% isobutano
52140 fili (12582 sensibili)

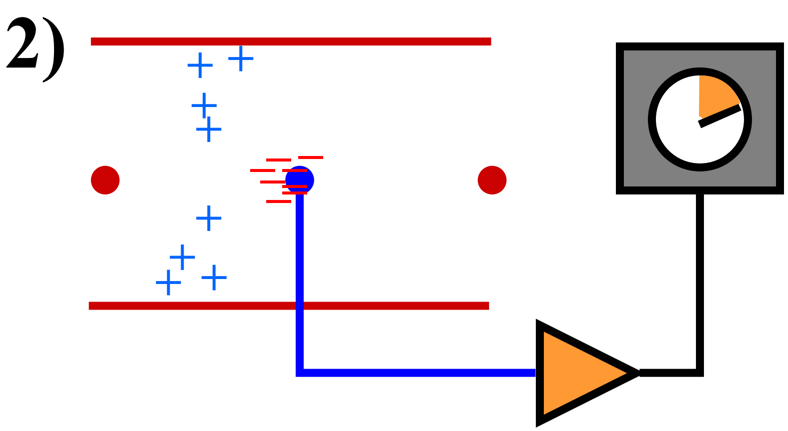
Calorimetro elettromagnetico
Matrice di piombo e fibre scintillanti
Peso: più di 100 tonnellate
4880 canali di lettura (PMT)

Bobina superconduttrice
Diametro: 5 m
$B = 0.52$ T ($\int B\,dl = 2$ T·m)

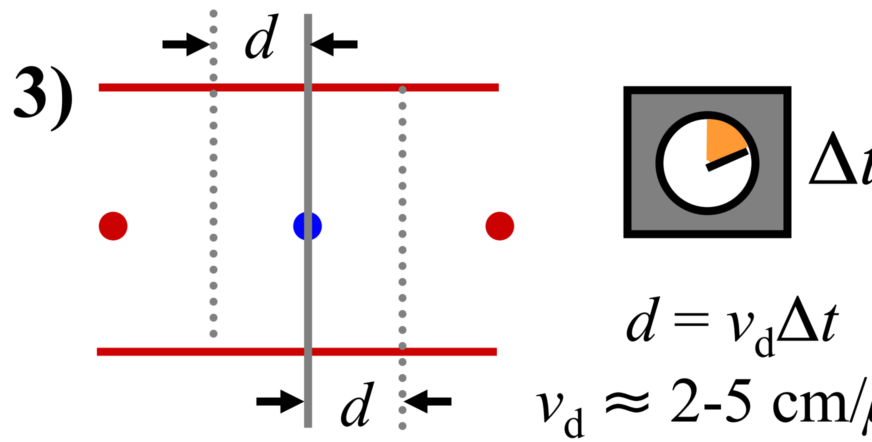
Particelle cariche: la camera a deriva



La particella passa e ionizza il gas nella camera
Un'altro rivelatore registra il passaggio della particella e fa partire un timer



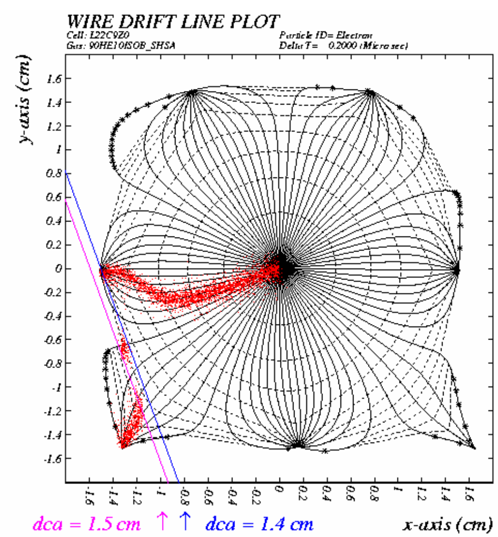
Gli elettroni (−) derivano verso l'anodo sotto l'influenza del campo elettrico applicato, dove registrano un segnale che ferma il timer



$d = v_d \Delta t$

$v_d \approx$ 2-5 cm/μs

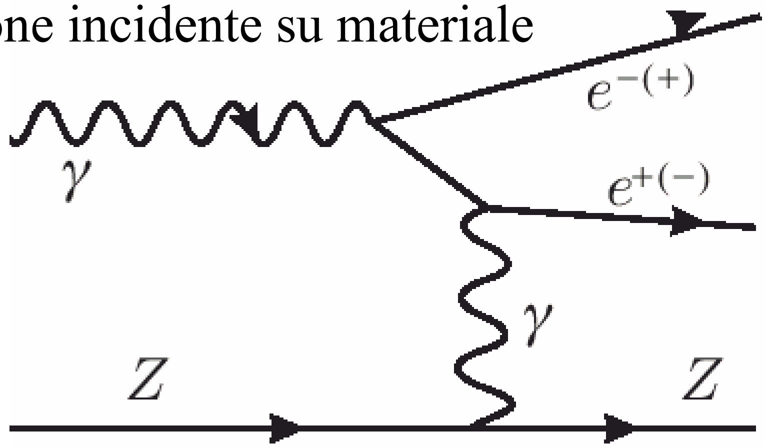
Conoscendo la velocità di deriva (v_d), dal tempo trascorso si ricava la distanza della traccia dal filo (con un'ambiguità destra-sinistra)



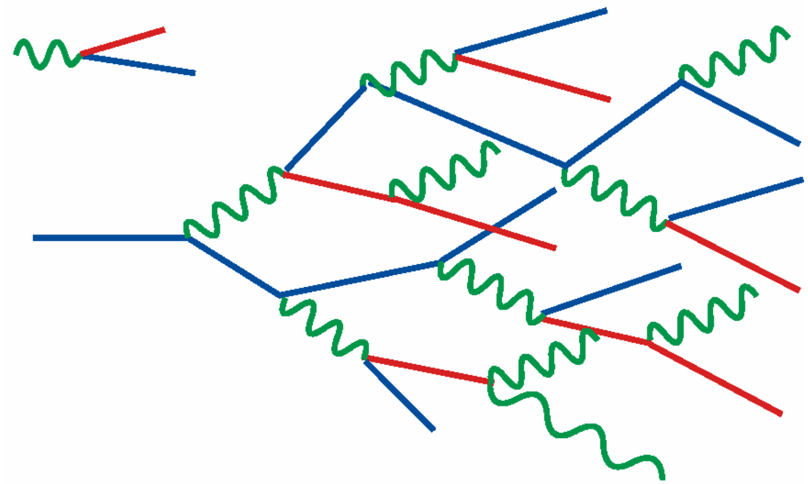
Analisi delle linee di deriva in una cella della camera KLOE

Rilascio di energia da fotoni e elettroni

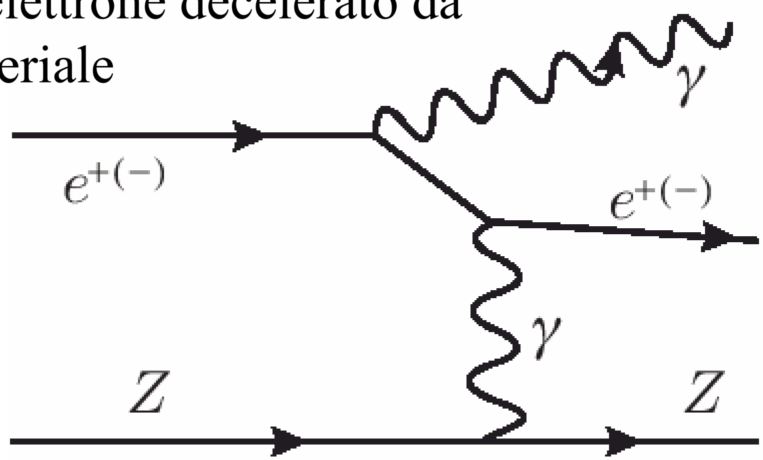
Produzione di coppie e^+e^- da un fotone incidente su materiale

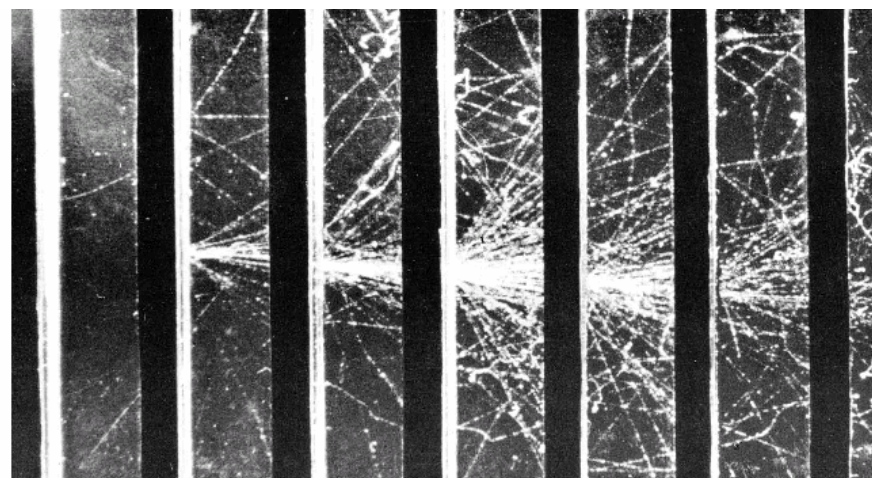


Sviluppo di uno **sciame elettromagnetico**



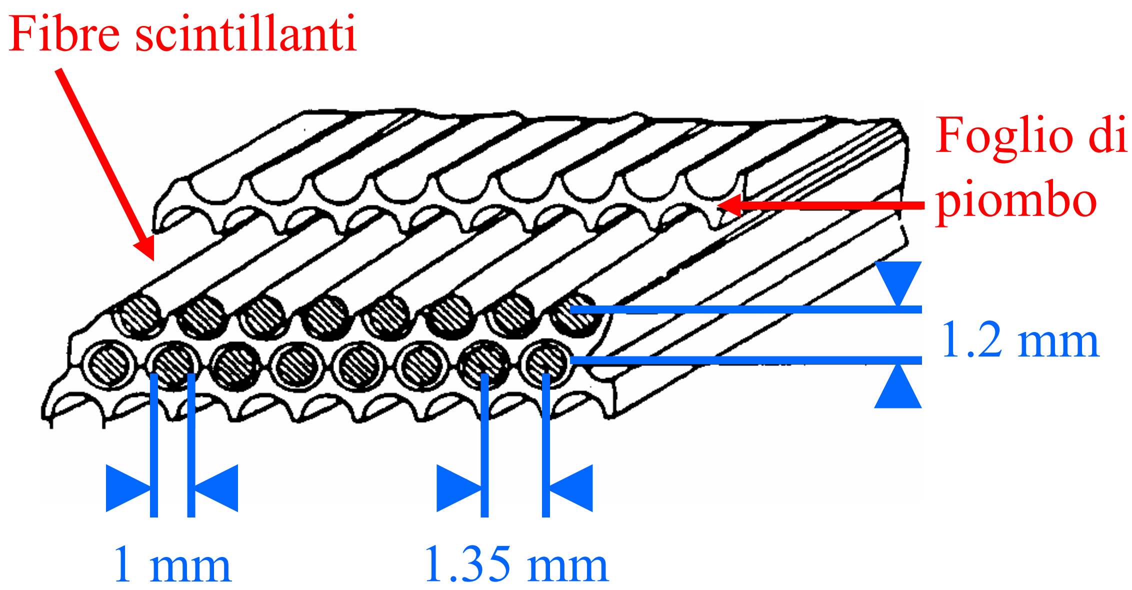
Bremsstrahlung: radiazione da un elettrone decelerato da un materiale





Sciame elettromagnetico osservato in una camera di Wilson

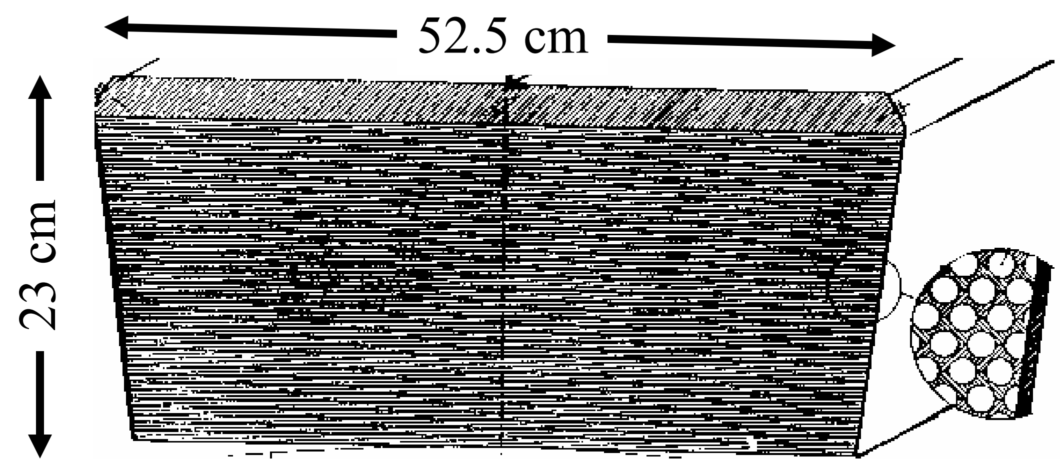
Il calorimetro KLOE



Composizione del modulo:
fibre:Pb:colla = 48:42:10%

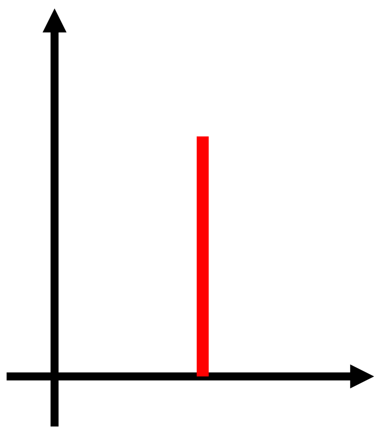
Densità: 5 g/cm^3

15% ca. dell'energia della particella incidente viene convertita in luce/segnale

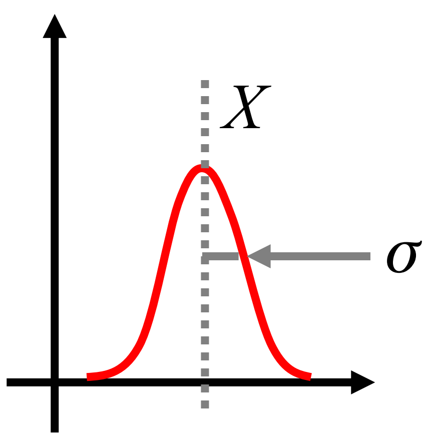


Cenni di statistica

Distribuzione di un valore vero fissato



Distribuzione dei valori misurati



Ad ogni misura è associata un'incertezza (errore)

Gli errori sono di due tipi:

Sistematici

andamenti dovuti a limitazioni dell'apparato sperimentale o a influenze esterne, cambiano il valore misurato

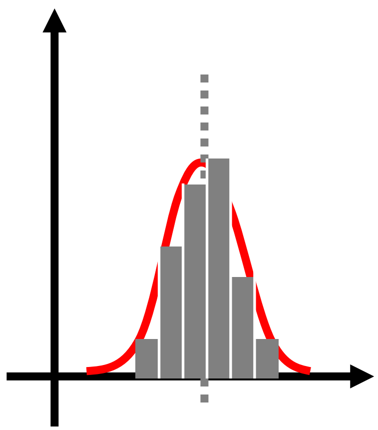
Statistici

fluttuazioni dovute a effetti stocastici (casuali), diminuiscono la precisione della misura

Spesso si assume che le fluttuazioni **statistiche** siano descritte dalla distribuzione di Gauss

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2} \right]$$

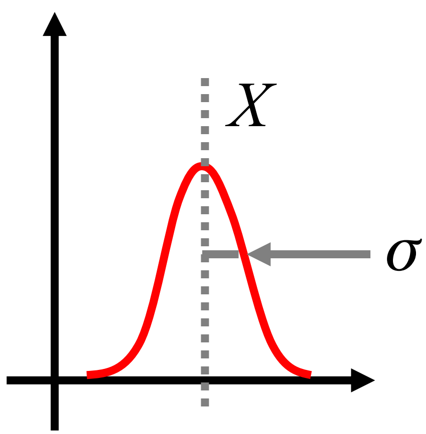
Cenni di statistica



Se abbiamo N misure con fluttazioni gaussiane, possiamo stimare:

$$X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \textit{la media}$$

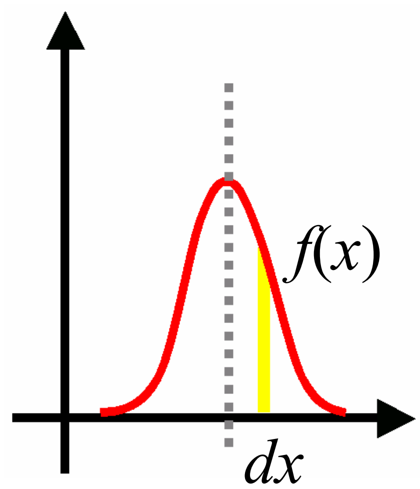
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X - x_i\right)^2} \quad \textit{la deviazione standard}$$



L'incertezza sulla media e' determinata sia dalla larghezza della distribuzione che dal numero di misure abbiamo fatto:

$$\delta X = \sigma / \sqrt{N} \quad \textit{l'errore sulla media}$$

Probabilità

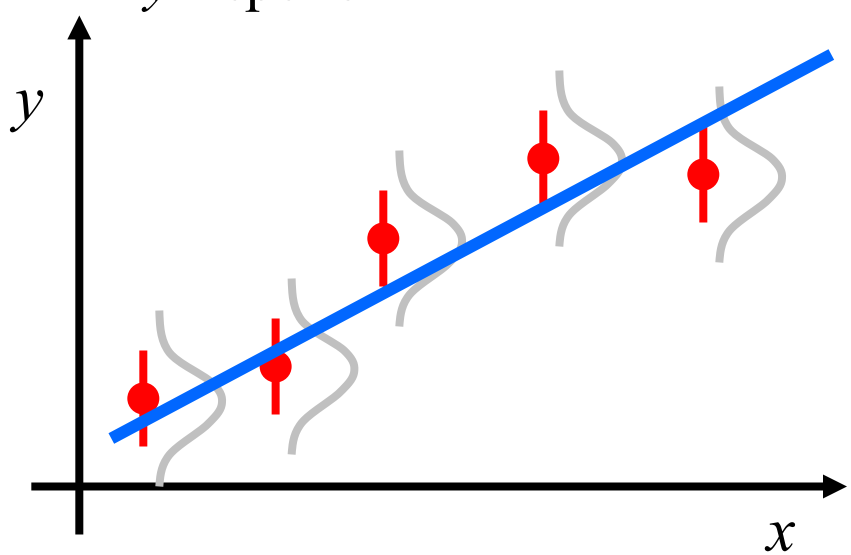


Se i valori misurati si distribuiscono secondo la gaussiana,

$$P = g(x|X,\sigma)\ dx$$

è la probabilità di ottenere un valore tra x e $x + dx$ da una singola misura.

Supponiamo di avere N misure di y e di conoscere la dipendenza di y rispetto a x



Il valore aspettato di y per ogni x è dato da $f(x)$

I valori di y misurati sono distribuiti intorno al valore aspettato secondo la gaussiana; per ogni misura i:

$$P_i = g(y_i|f(x),\sigma_i)$$

Probabilità congiunta e χ^2

La probabilità di ottenere tutti gli N valori di y misurati è

$$P_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^{N} P_i$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{\left[y_i - f(x)\right]^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

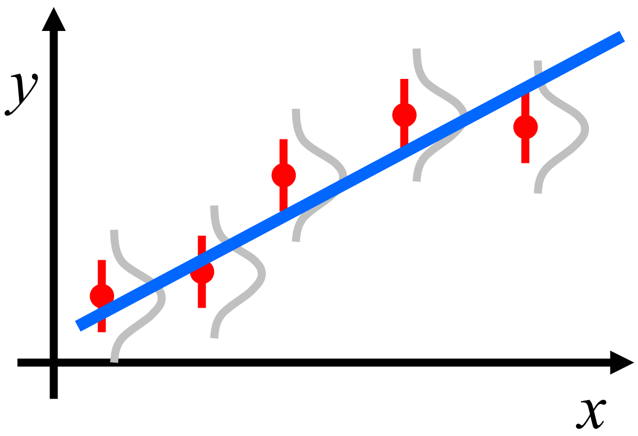
$$\ln P_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2}\left(\frac{\left[y_i - f(x)\right]^2}{\sigma_i^2} \right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \ln 2\pi\sigma_i^2$$

La somma dei termini ($\ln 2\pi\sigma^2$) è una costante che non dipende né dai valori misurati, né dalla previsione $f(x)$ e può essere trascurata.

Definiamo:

$$\chi^2 \equiv -2\ln P_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[y_i - f(x)\right]^2}{\sigma_i^2}$$

L'uso del χ^2 per fare un fit



$$\chi^2 \equiv -2 \ln P_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[y_i - f(x)\right]^2}{\sigma_i^{\;2}}$$

Se le nostre assunzioni sono valide, in media ogni termine (che corrisponde a un punto misurato) contribuisce circa 1 alla somma χ^2

Si può stimare che $\chi^2/N \approx 1$

Supponiamo che f dipenda dai parametri a_1, a_2, $\ldots a_M$. Conosciamo la dipendenza di f dalle a_k, ma non sappiamo i valori esatti delle a_k stesse.

Possiamo massimizzare P_{tot} in funzione delle a_k, ovvero minimizzare χ^2:

Imponiamo:

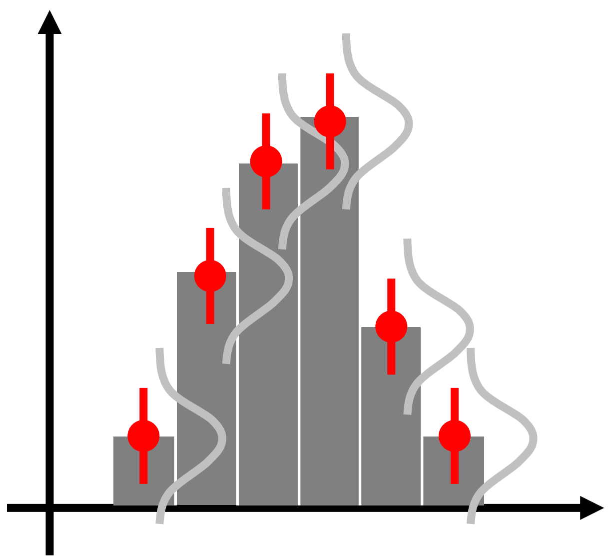
$$\left.\frac{d\chi^2}{da_k} = 0 \quad \right\} \quad \begin{array}{l} M \text{ equazioni} \\ \text{per } M \text{ valori } a_k \end{array}$$

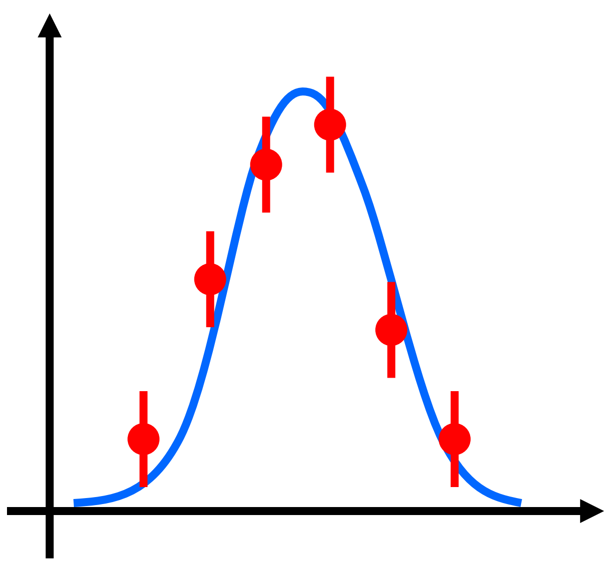
La minimizzazione può risultare difficile.

Di solito si ricorre a tecniche numeriche.

Se il χ^2 viene calcolato con i migliori valori delle a_k: $\boldsymbol{\chi^2/(N-M) \approx 1}$

Esempio: fit a una distribuzione gaussiana





Abbiamo un istogramma di N bin, ciascuno con n_i eventi

Supponiamo che l'istogramma sia descritto da una gaussiana con media X e larghezza σ

Spesso si assume che i valori di n_i siano a loro volta distribuiti intorno ai valori veri secondo delle gaussiane con larghezza $\sqrt{n_i}$

E' importante non fare confusione tra la "gaussianità" delle fluttuazioni e dell'istogramma

Minimizzando numericamente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[n_i - g(x \mid X, \sigma)\right]^2}{n_i}$$

si risale a X e σ, e ci si aspetta $\chi^2 = N-2$