LNF 18-9-02

Dalle osservazioni sperimentali alle ipotesi scientifiche

G. D'Agostini
Roma 1

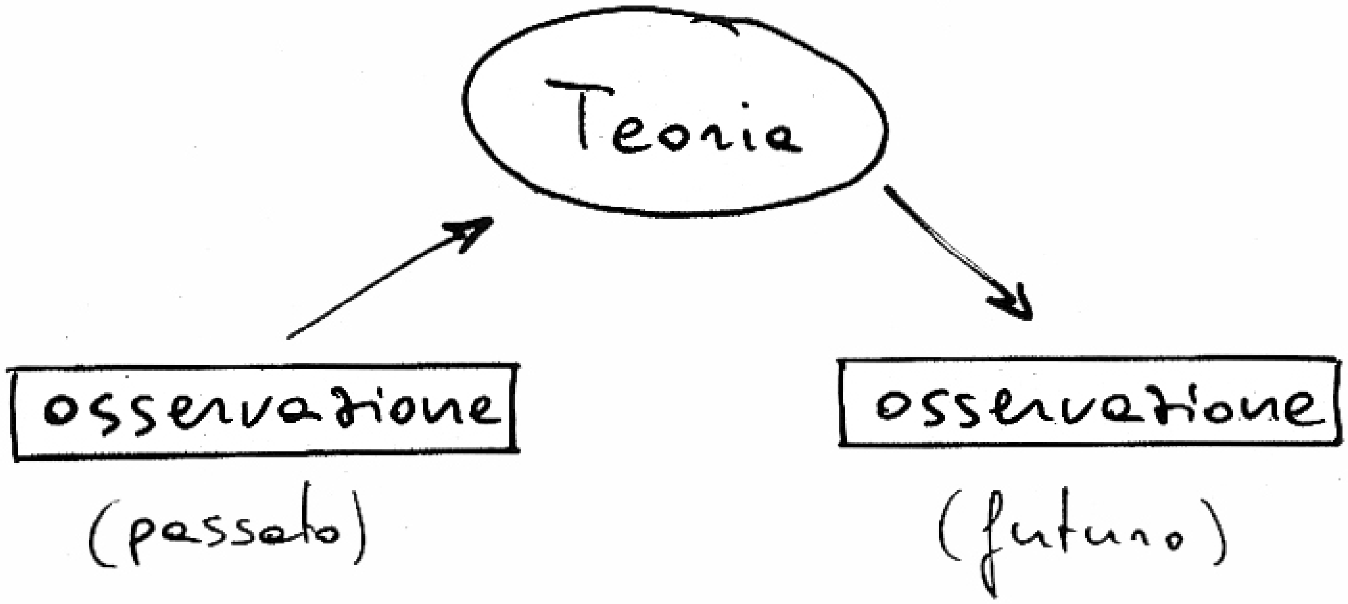
A "cosa"
Quanto
CREDERE ?

Alla luce delle OSSERVAZIONI

Compito del "fisico"

→ descrivere/capire il mondo

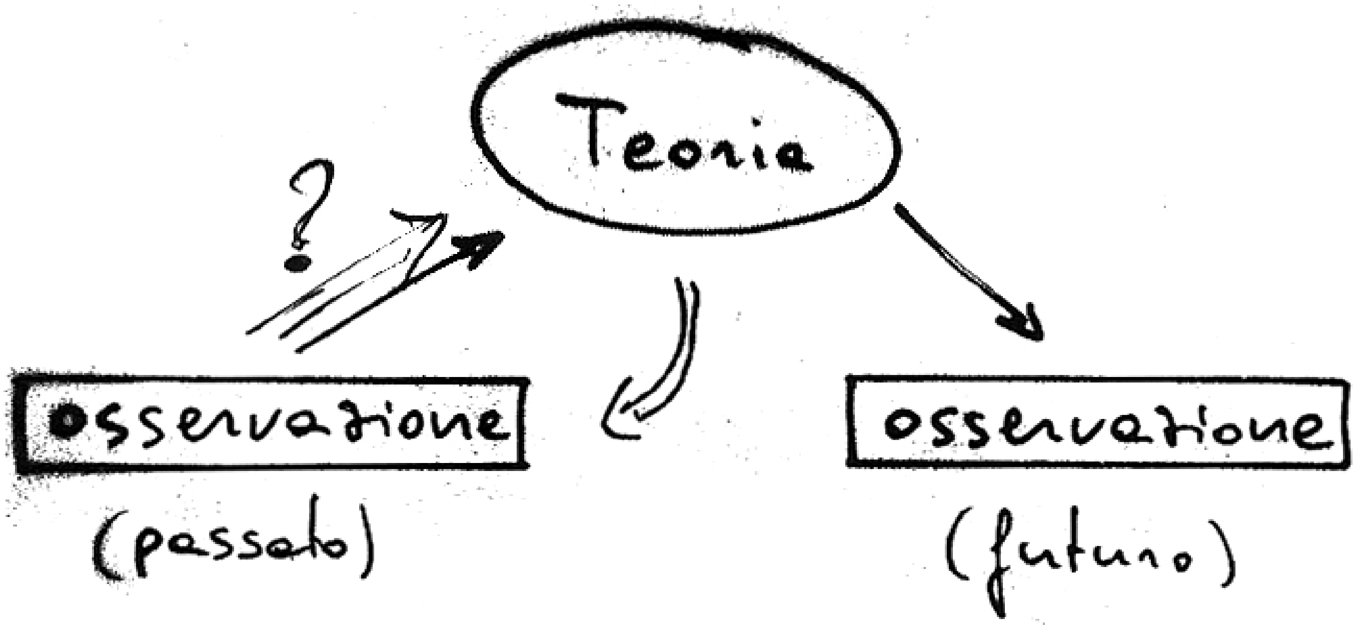
→ prevedere osservazioni



Compito del "fisico"

→ descrivere/capire il mondo

→ prevedere osservazioni



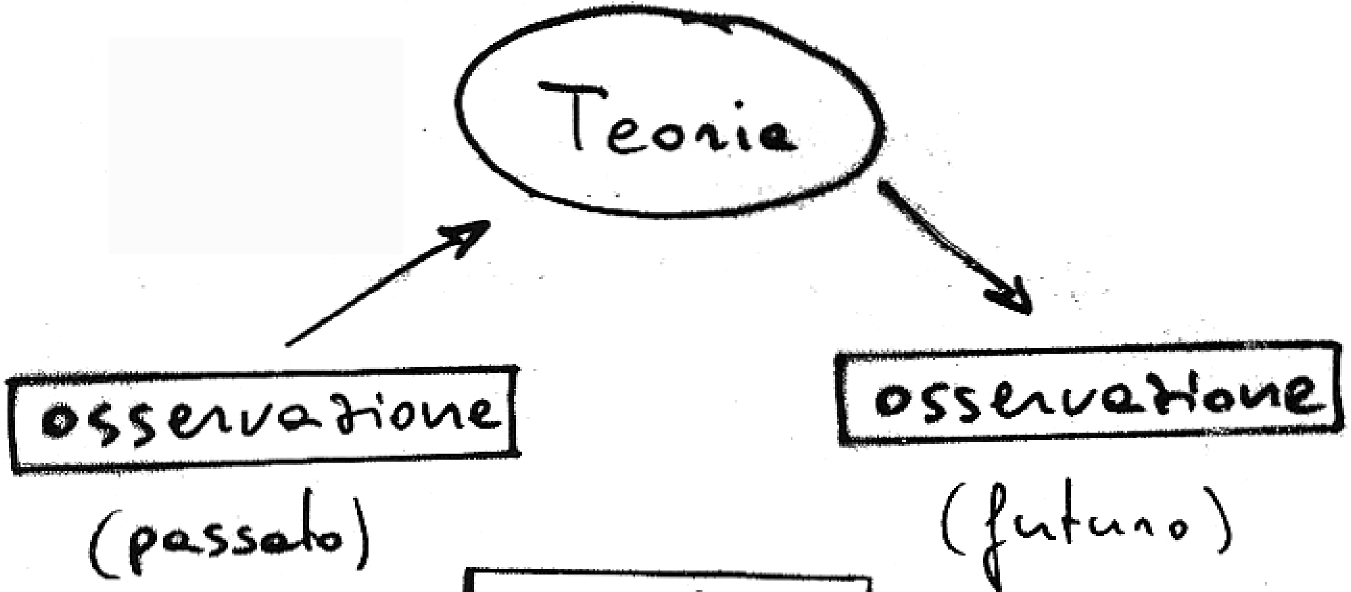
- Processo non automatico
- né puramente contemplativo

⇒ "metodo scientifico"
esperimenti pianificati

Compito del "fisico"

→ descrivere/capire il mondo

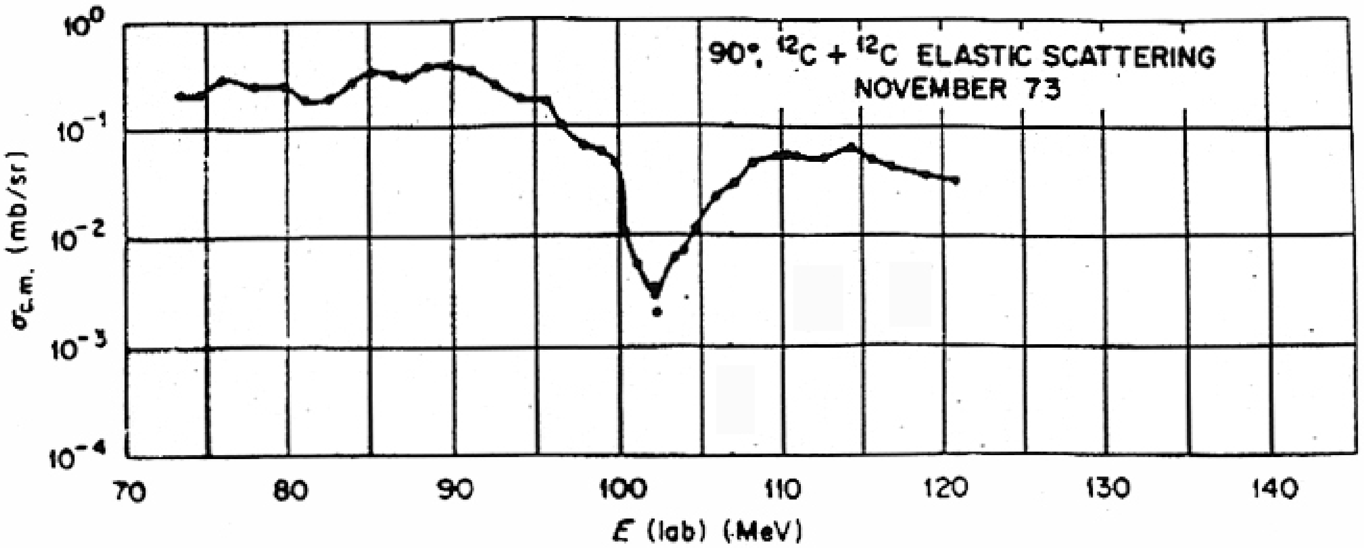
→ prevedere osservazioni



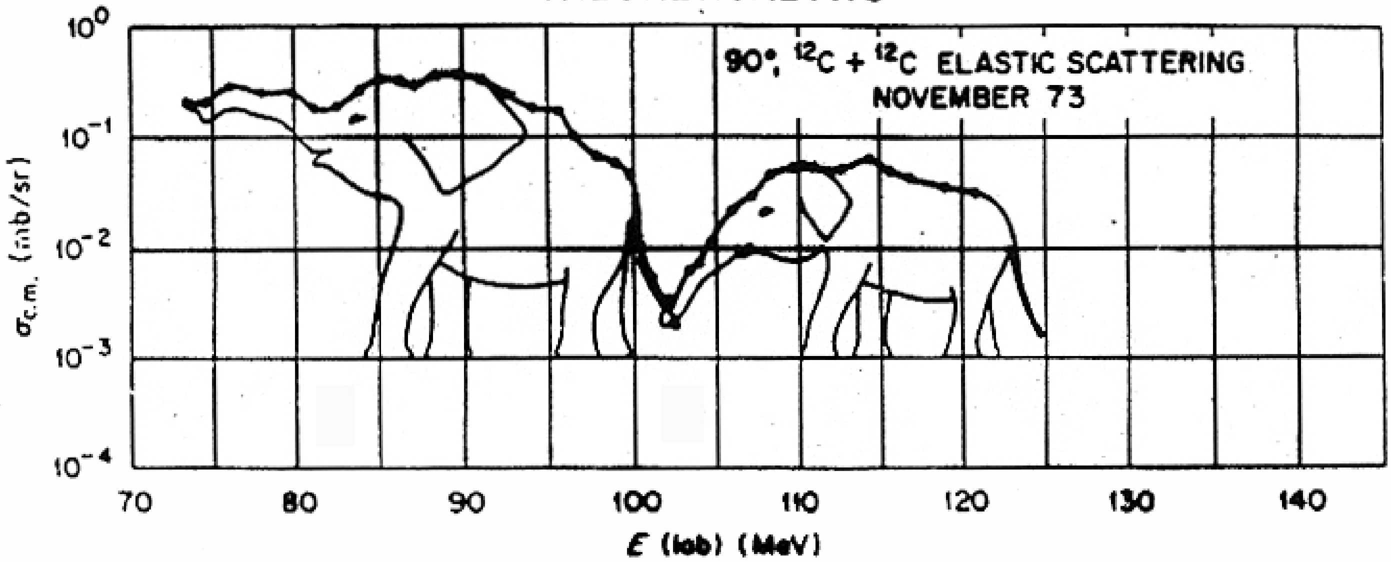
Incertezze

1. Date le osservazioni passate, in genere non siamo certi dei valori dei parametri della teoria (o della teoria stessa) → incerti sulle osservazioni
2. Anche quando fossimo certi della teoria, ci sono effetti interni ad essa (M.Q.) ed esterni (rumore, condizioni iniziali o al contorno, errori di misura) che ci rendono incerti sugli accadimenti futuri

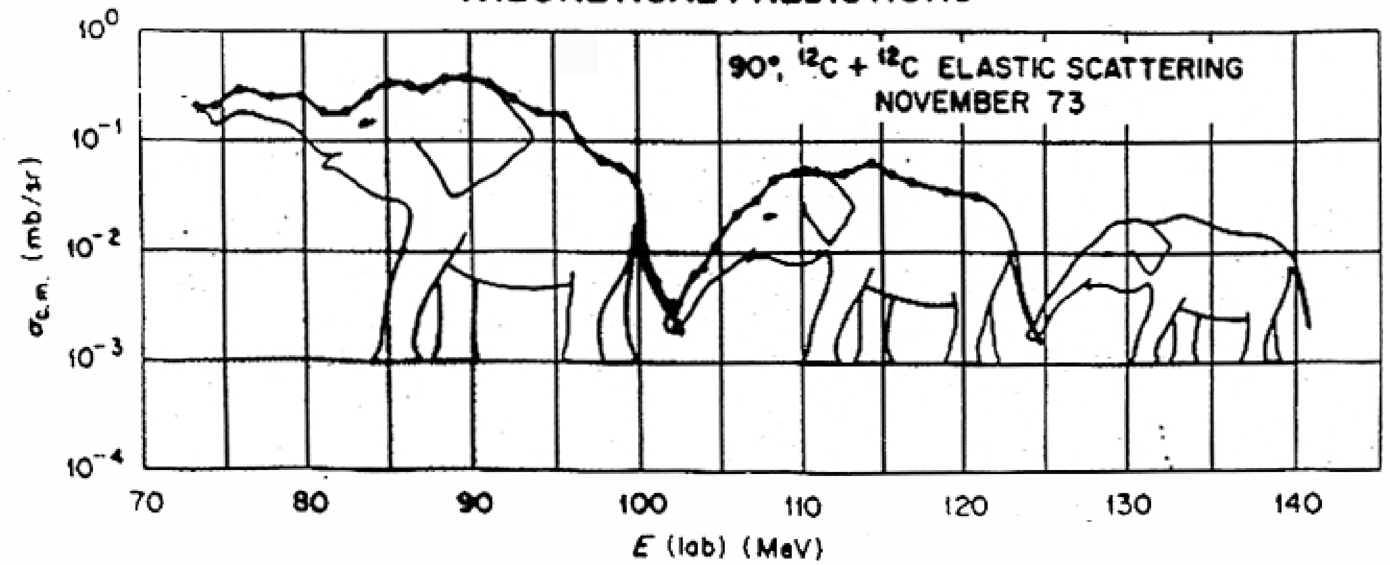
EXPERIMENTAL DATA



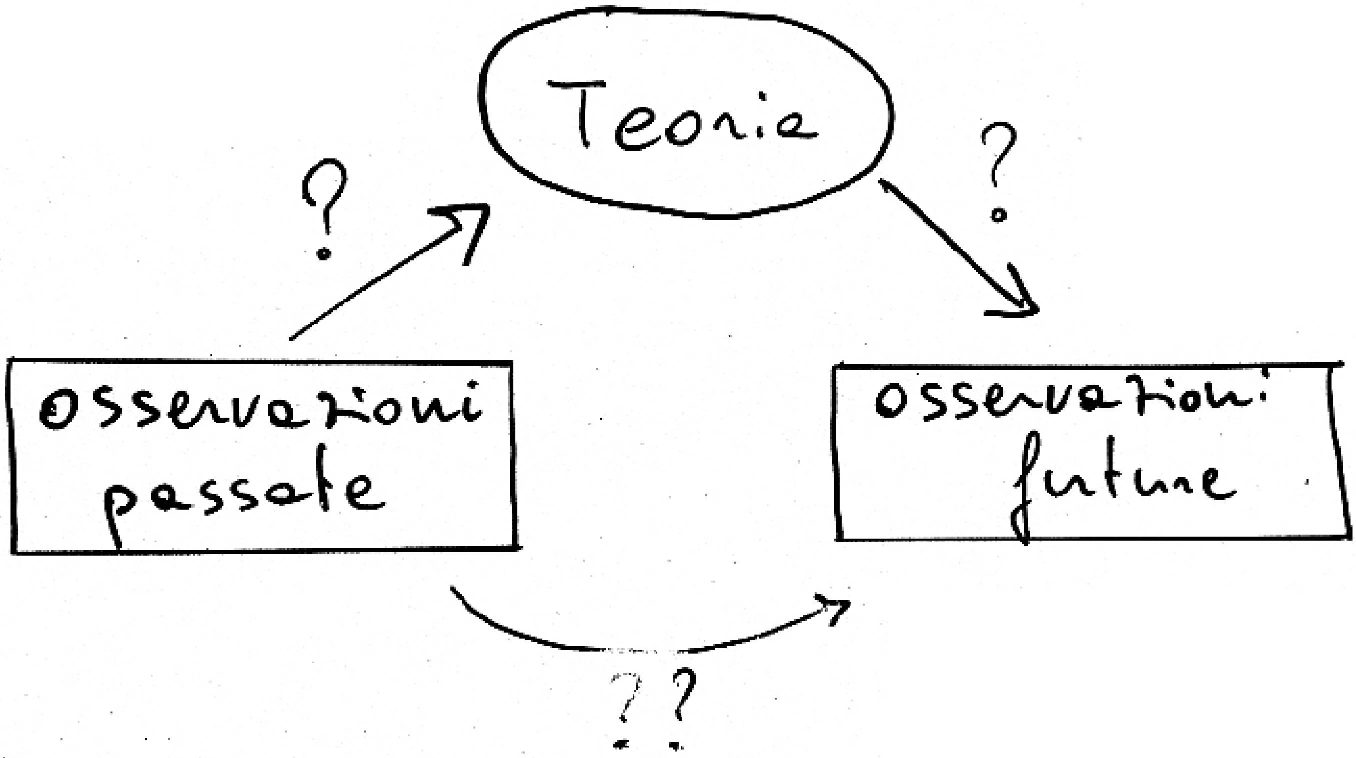
THEORETICAL FITS



THEORETICAL PREDICTIONS



The process of fitting data, as seen by Subramanian Raman in *Science with a Smile*.



3 stadi di incertezza

Teoria $\xrightarrow{?}$ osservazioni future

osservazioni passate $\xrightarrow{?}$ Teoria

→ osservazioni passate $\xrightarrow{?}$ osservazioni future

["problema dell' Induzione" - D. Hume]

→ riconducibili a

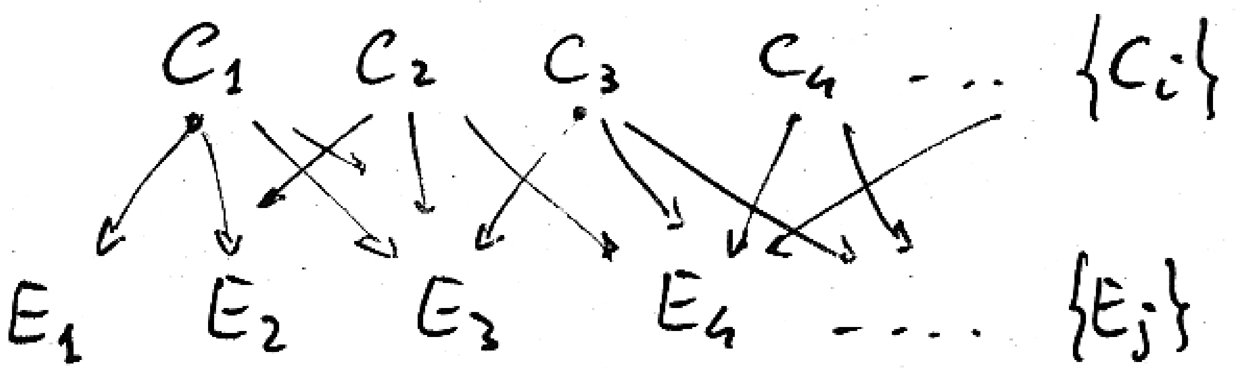
Incertezza sulle connessioni causali

CAUSA → EFFETTO

? • determinismo
o
• indeterminismo

- La stessa causa ("apparente")
  può produrre diversi effetti

- Dato un effetto osservato, ci
  sono più cause che potrebbero
  averlo prodotto



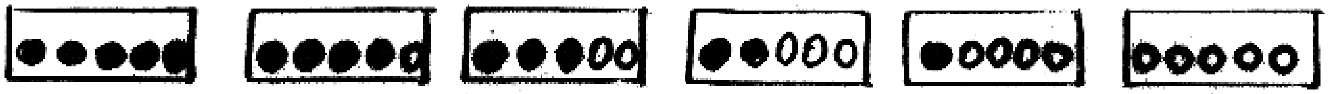
Osservo E_j $\Rightarrow$ a quali C_i credere?

"Though there is no such thing
as Chance in the world;
our ignorance of the real cause
of an event has the same influence
on the understanding, and
begets a like spicies of belief
or opinion"

(David Hume)

⇒ Non importa essere deterministi
("Dio non gioca a dadi" - Einstein)
o indeterministi ("meccanica quantistica
intrinsecamente probabilistica")
⇒ l'effetto pratico sulla nostra mente
e, in particolare, sulla nostra incertezza non cambia

<u>Esempio guida</u>



H_0 $\quad$ H_1 $\quad$ H_2 $\quad$ H_3 $\quad$ H_4 $\quad$ H_5

- Stato simmetrico di preparazione
  (di sei scatole indistinguibili <u>ne scelgo una a caso</u>)

- <u>Incertezza</u>:
  - → Che scatola ho scelto? $H_0, H_1, \dots H_5$?
  - → Estraggo una pallina dalla scatola sorteggiata: di che colore sarà? B o N?

Nota: se anche fossi certo di quale scatola ho scelto, in genere non sono sicuro del risultato dell'esperimento (H_0 e H_5 sono casi limite, rari nella pratica scientifica)

- L'incertezza cambia alla luce delle informazioni sperimentali

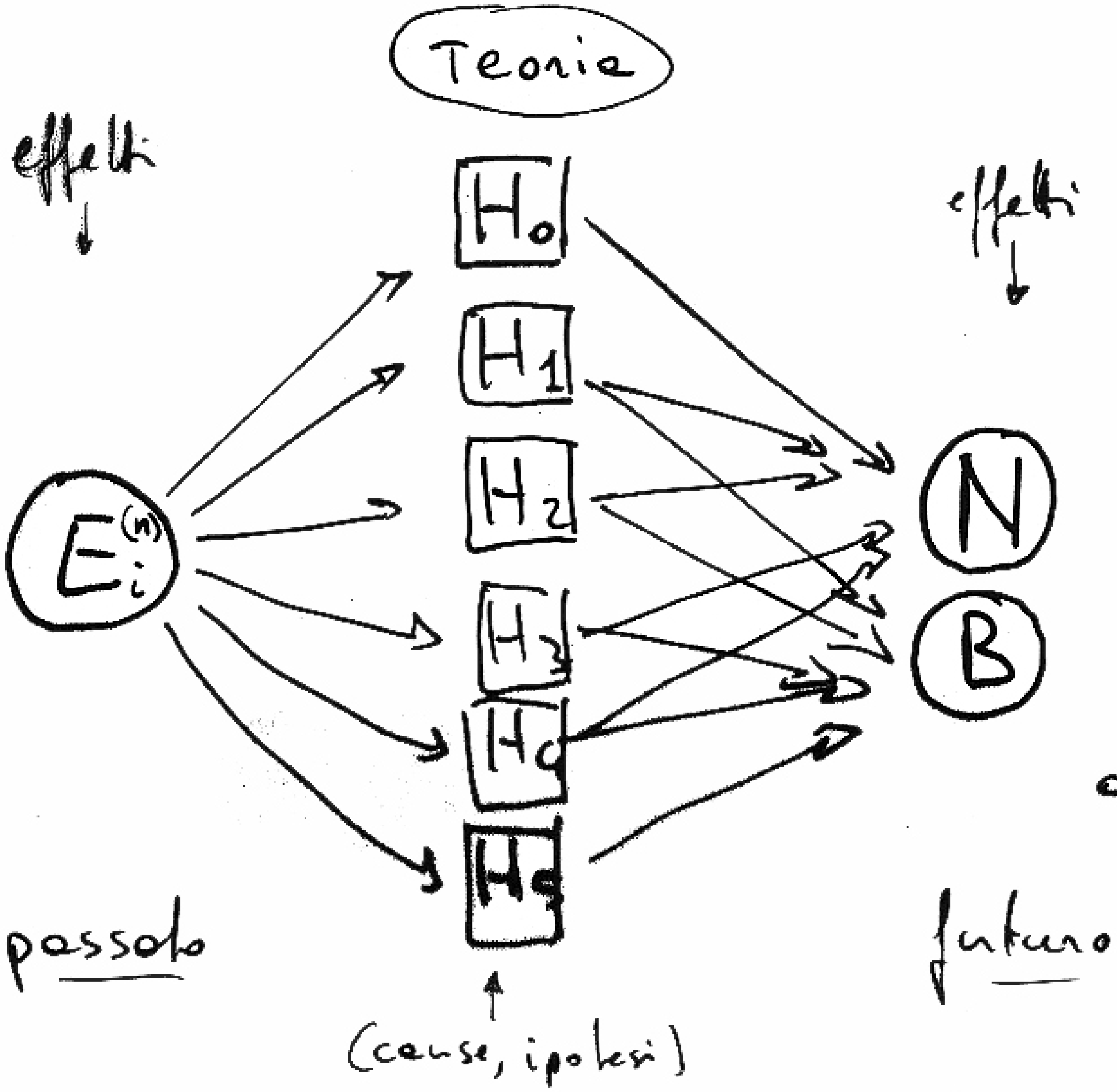
→ reintroduco la pallina nella scatola, mischio e ricomincio

→ Stessa situazione iniziale?

NO!

→ L'esperimento ha cambiato:

- la mia opinione sulla composizione della scatola
- la mia opinione su quale colore potrei osservare in un esperimento futuro



(possiamo anche estendere le nostre previsioni a sequenze future)

$E_i^{(n)}$: possibili sequenze osservabili

$n = 2$

$E_1^{(2)}$: $\{N, N\}$

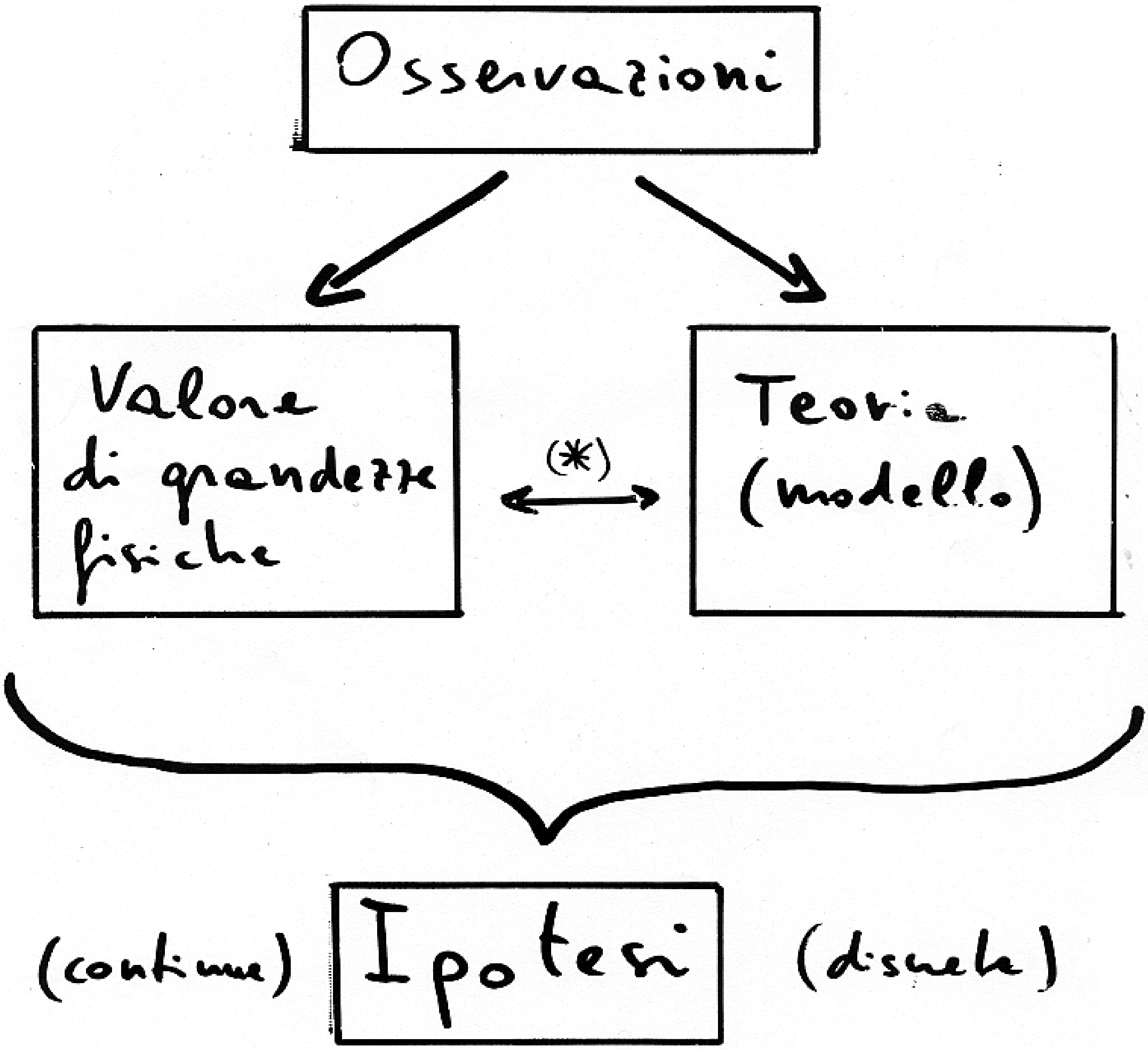
$E_2^{(2)}$: $\{N, B\}$

$E_3^{(2)}$: $\{B, N\}$

$E_4^{(2)}$: $\{B, B\}$

Incertezze in "Fisica"

[osservazioni passate → teoria]



(*) Una grandezza può avere significato solo nell'ambito di una teoria

Perché ci sono incertezze?

A) Determinazione di valori di grandezze fisiche:
"perché ci sono errori di misura".

B) Test di teoria

1) teoria probabilistica
"le osservazioni non sono conseguenza logica della teoria"

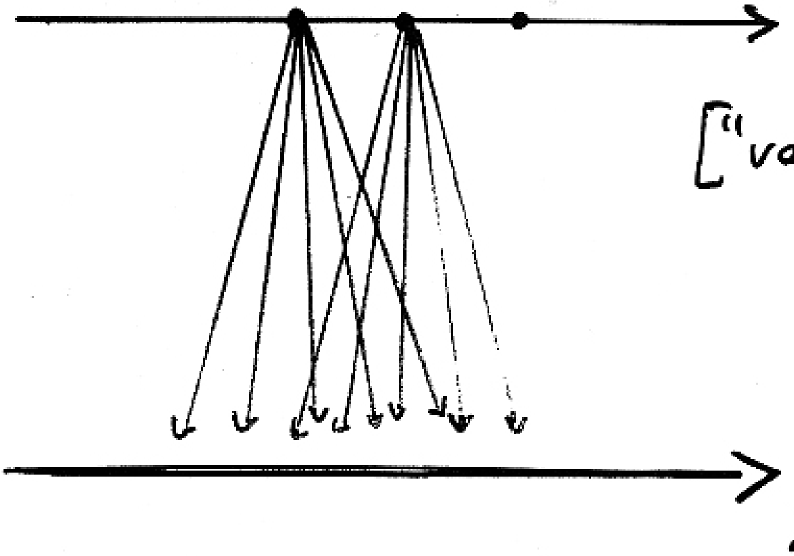
Moneta regolare: T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T
T T C C C C C C T T T T T C T T C C T T T T .

2) Teoria deterministica
"Le osservazioni non sono semplicemente conseguenza logica della teoria, ma dipendono da altri fattori a lei esterni" (condizioni al contorno, effetti secondari, [illegible], errori di misura → !!) ..

Nostra Conoscenza del Mondo

Nostra mente

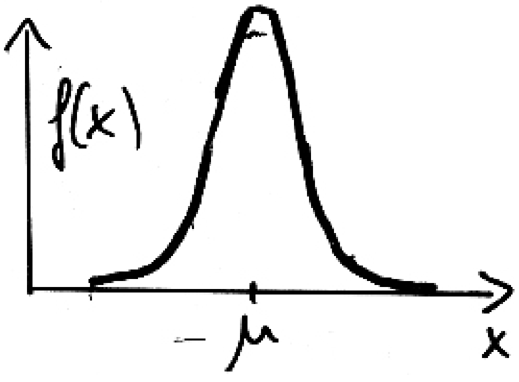
Nostri sensi



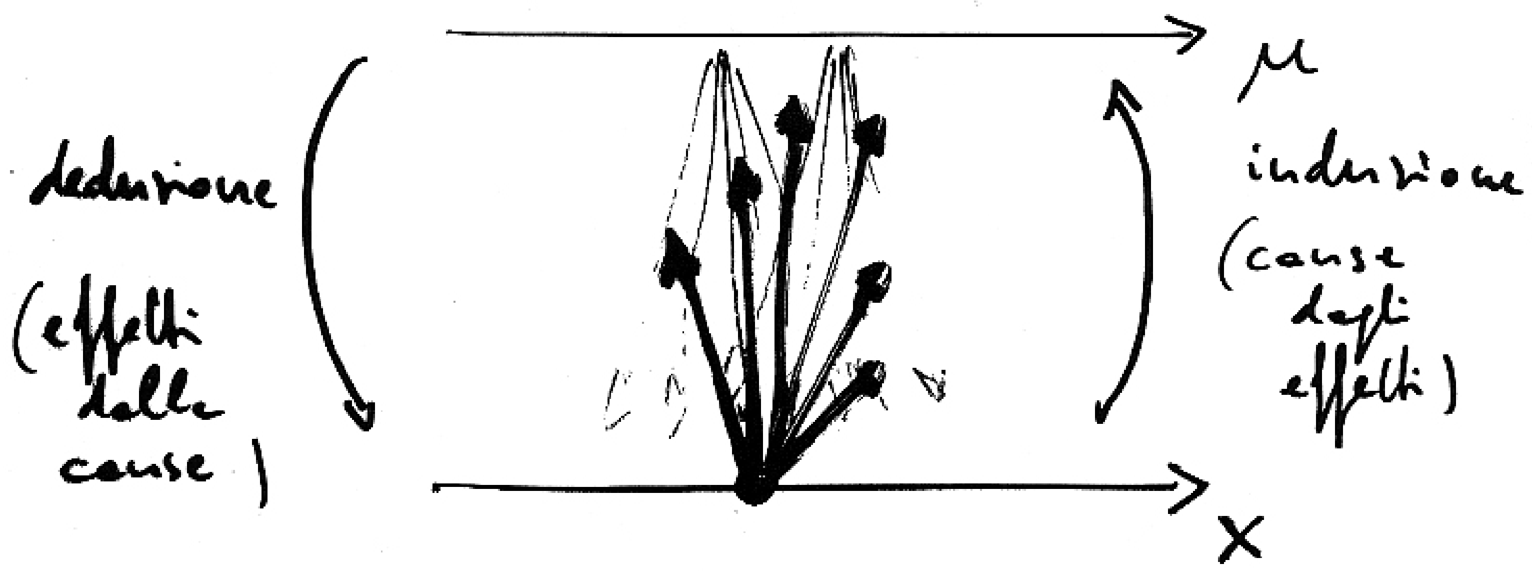
(

Ad esempio, x può essere descritto da una distribuzione di Gauss intorno a μ

$$f(x\,|\,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



)



Simmetria per quanto riguarda la nostra incertezza

- Dato un valore di μ, ci sono [intervalli di] valori di x ai quali crederò di più e altri ai quali crederò di meno
- Dato un valore di x, ci sono [intervalli di] valori di μ ai quali crederò di più e altri ai quali crederò di meno

__Uncertainty__ : we are not certain,

but - "we are more or less __confident__" ...

- "we consider something more or less __probable__", "more or less __likely__", ...
- "we __believe__ more or less something"

etc ...

We, as physicists, consider natural and meaningful statements of the kind :

- $P(-10 < \varepsilon'/\varepsilon \times 10^4 < 50) \gg P(\varepsilon'/\varepsilon > 100)$
- $P(170 \le m_{top}/\mathrm{GeV} \le 180) \approx 70\%$
- $P(M_H < 200\ \mathrm{GeV}) > P(M_H > 200\ \mathrm{GeV})$

The constant status of uncertainty does not prevent us from doing science

<u>Remember</u>:

"It is scientific only to say

what is more likely

and

what is less likely"

(R. Feynman)

Come quantificare tutto ciò?

- Approccio falsificazionista
  (e variazioni "statistiche" sul tema)

- Approccio probabilistico

- Approccio falsificazionista ("Popper")

$$\left.\begin{array}{c} C_i \\ \not\downarrow \\ E \end{array}\right\} \Rightarrow \not{C}_i$$

$\Rightarrow$ Le cause che non possono produrre gli effetti osservati sono "falsificate" $\rightarrow$ esempio delle 6 scatole

Analogia con il metodo di <u>dimostrazione per assurdo</u> della logica deduttiva

- assumiamo un'ipotesi vera
- ne traiamo "tutte" le conclusioni logiche
- se una delle conclusioni è notoriamente/manifestamente falsa, l'ipotesi è ritenuta falsa.

"Ok", <u>ma</u>

- cosa fare di tutte le ipotesi non falsificate? (Limbo?)

- cosa fare quando "niente" di quello che si osserva è incompatibile con l'ipotesi?
  - Particolarmente importante per teorie probabilistiche, o quando siamo in presenza di errori con code molto lunghe

Es.: gaussiana: $f(x \mid \mu)$

$\Rightarrow$ dato qualsiasi valore di μ, tutti i valori di x da $-\infty$ a $+\infty$ sono possibili

$\rightarrow$ avendo osservato qualsiasi valore di x, nessun valore di μ è da escludere

Schematicamente

A) se $C_i \xrightarrow{\text{impossibile}} E$

e osservo E

$\Rightarrow$ C_i è impossibile ("falsa")

(Ok)

B) se $C_i \xrightarrow{\text{poco probabile}} E$

e osservo E

$\Rightarrow$ C_i è poco probabile

NO

Note: - nella pratica: "poco probabile" $\approx 1\% - 5\%$

$\Downarrow$

"praticamente impossibile

- quando gli eventi osservabili sono talmente tanti, per cui ciascuno è "praticamente impossibile", il ragionamento viene esteso a insieme di questi eventi (le famigerate probabilità delle code) $\Rightarrow$ SITUAZIONE PEGGIORA (NON TRATT.)

Esempi

1) Lotto

H : "gioco onestamente al lotto puntando su una cinquina"

E : "vinco"

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] H \arrow[r, "\text{``praticamente impossibile''}"'] & E \arrow[l, bend left=60, "\text{``praticamente da escludere''}"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ "quasi certamente ho imbrogliato"

?

2. Test AIDS

- Un cittadino estratto a caso effettua un test dell'AIDS:

- Analisi non perfetta

$$
\begin{tikzcd}
H_1 = \text{"HIV" ("infetto")} \arrow[r, "100\%"] & E_1 = \text{"Positivo"} \\
H_2 = \text{"}\overline{\text{HIV}}\text{" ("sano")} \arrow[ur, "0.2\%"] \arrow[r, "99.8\%"'] & E_2 = \text{Negativo}
\end{tikzcd}
$$

- Risultato: "Positivo"

- Possiamo dire che:
  - «Poiché è "praticamente impossibile" che un sano sia ritenuto positivo, allora la persona è "praticamente certa" essere infetta»?
  - «C'è solo lo 0.2% di probabilità che la persona sia sana, ovvero al 99.8% è infetta»?

NO!

⇒ Queste "inversioni di probabilità" sono arbitrarie e, in genere, producono risultati "deleteri"

Purtroppo non sto considerando "trabocchetti" per esami di statistica

⇒ "Si sbaglia da professionisti"

(Paolo Conte)

1997 HERA "events"

H1 and ZEUS Experiments, DESY

$e + p \longrightarrow e + X$
$(27 + 820 \text{ GeV})$

At high Q^2 ($\gtrsim 10\,000 \text{ GeV}^2$) "they"*
found a "statistically significant excess"

"≈ Pvalue" ≈ 1%

⇒ new Physics : leptoquark?

- highly unexpected particle
- no characteristic signature a part from event counting

"CORRIERE DELLA SERA"

Corriere della Sera
Domenica, 23 Febbraio 1997
Da definire

La sua identificazione forse già entro l'anno

Il quark presto detronizzato da una nuova particella

Il quark, la particella più piccola della materia finora conosciuta sta per perdere il suo record. Si fanno, infatti, sempre più numerosi gli indizi che dimostrano l'esistenza di altre particelle di cui gli stessi quark sarebbero formati.

Incontri ravvicinati ad altissima energia fra positroni (o elettroni positivi) e protoni, provocati nell'anello di accumulazione denominato *Hera* , al laboratorio Desy di Amburgo, suonerebbero il segnale di una nuova fisica. Assommandosi ad altre indicazioni, come le definisce il vicepresidente dell'Infn (Istituto nazionale di fisica nucleare) Luciano Mandelli, gli indizi ottenuti, infatti, porterebbero ad un superamento dell'attuale teoria dei quark. Sarà però necessario raccogliere ulteriori dati per verificare l'effettivo consolidarsi di questa tendenza.

Nella super-macchina di Amburgo, i positroni penetrano nella profondità del protone e urtando contro un quark annidato al suo interno, generano un *jet* di particelle ad alta energia. Esaminando questi dati ad Amburgo si è visto che, a distanze più piccole di quelle esplorate fino ad oggi, questi urti fra positroni e protoni sono più numerosi di quanto previsto dalle attuali teorie.

Ciò fa supporre che alle altissime energie esplorate ad *Hera* , fra positrone e quark si eserciti un nuovo tipo di forza. E secondo la versione attuale della teoria quantistica, detta teoria dei campi, ad un nuovo tipo di forza deve corrispondere un nuovo tipo di particella. Si fa sempre più accesa dunque la caccia a particelle di natura completamente nuova, come gli ipotetici costituenti del quark stesso.

Al momento le ipotesi abbondano nel predire che cosa sarà la nuova particella, ma solo la sperimentazione potrà dire l'ultima parola. Intanto due comunicati emessi ad Amburgo e a Roma (dall'Infn) lasciano intendere che la conclusione sia vicina, forse già entro il 1997. Nutrita la partecipazione agli esperimenti di Amburgo da parte dei fisici italiani (una sessantina) riuniti in due gruppi guidati da U. Dosselli dell'Infn di Padova e da B. Stella dell'Infn di Roma. L'industria italiana ha fornito quasi la metà dei grandi magneti superconduttori impiegati nella macchina.**(L.Bel.)***

Esempio 3: "Eventi strani ad HERA" (1997 High Q^2 events at HERA)

Esperimenti: $P(\text{"dati"} \mid SM) \approx 1\%$

+"tail"

D E S Y

The two HERA experiments, H1 and ZEUS, observe an excess of events above expectations at high-x (or M = sqrt(xs)), y, and Q-squared. For Q-squared > 15,000 GeV-squared, the joint distribution has a probability of less than one per-cent to come from Standard Model NC DIS processes. Within this model, the predictions are known with confidence.

I N F N

Mercoledi' 19 Febbraio la Direzione del laboratorio DESY di Amburgo ha comunicato che i due esperimenti che studiano le collisioni tra positroni (elettroni positivi) e protoni all'anello di accumulazione denominato HERA hanno rilevato un numero di urti superiore a quanto previsto dall'attuale teoria delle forze subnucleari in una regione cinematica precedentemente inesplorata. La probabilita' che gli eventi osservati siano una fluttuazione statistica e' inferiore all'1%. A una ottantina di anni di distanza potrebbe ripetersi, su una scala mille volte piu' piccola, l'esperienza di Rutherford che agli inizi del secolo ha indicato la presenza del nucleo atomico all'interno dell'atomo.

$\Rightarrow P(SM \mid \text{"dati"}) < 1\% \Rightarrow P(SM \mid \text{"dati"}) > 99\%$?!

Corriere della Sera --->>

+"tail" +"tail"

Many of these claims in seminars, papers and press releases

the most dangerous!

Just a couple of recent ones:

September 2000 (spokeperson of LEP collaboration)

http://PhysicsWeb.org/article/news/4/9/2/1:

"It is a 2.6 sigma effect. So there's still a 6 in 1000 chance that what we are seeing are background events, rather than the Higgs"

$$\Rightarrow P(\text{Higgs at LEP}) = 99.4\% \quad !$$

February 2001 (BNL News Release on "g-2")

http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/
↳ /bnlpr020801.htm:

"We are now 99% sure that the present Standard Model cannot describe our data"

$$\Rightarrow P(\text{Physics beyond SM} \mid \text{this experiment}) = 99\% \; !$$

?

(we mostly believe that SM is not enough, but not because of this experiment alone!

Perché?

Di chi è la responsabilità?

⇒ Dai primi decenni del '900 è in auge un approccio alla probabilità "innaturale", contrapposto a quello dei grandi probabilisti dei secoli precedenti (Poisson, Bernoulli, Laplace, Gauss, etc.)

⇒ In questo approccio (scuola frequentista) è proibito parlare di probabilità delle ipotesi, delle cause, dei valori di grandezze fisiche, etc

⇒ Questo concetto è stato surrogato dai meccanismi di "test di ipotesi" e i famigerati C.L. ("livelli di confidenza"), (e "significatività" statistica) i quali spesso funzionano "per caso", altre volte danno luogo a errori madornali!

⇒ <u>Rivedere completamente</u>

<u>la logica dell'incertezza</u>

Di cruciale importanza
per poter imparare dai
dati sperimentali in
modo coerente.

⇒ 2) <u>Approccio probabilistico</u>

Cosa fare?

⇒ Ritorno al passato ("Laplace & Co.)

⇒ tenendo conto di molto lavoro teorico svolto negli ultimi ≈60 anni ("de Finetti" & Co.)

→ usando i recenti sviluppi matematici e, per i problemi complessi, gli impressionanti sviluppi computazionali degli ultimi decenni

[una delle ragioni dell'abbandono di massa delle idee dei grandi probabilisti era stata la complessità di calcolo → sono stati preferiti ragionamenti e metodi in cui la matematica è stata semplificata, ma purtroppo al punto che spesso si dà una risposta ad una domanda diversa da quella che lo scienziato cerca in realtà.]

Cosa <u>è</u>

la probabilità?

(e come se ne calcola
il <u>valore</u>?)

La probabilità <u>non è</u>

) $\dfrac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi ugualmente probabili}}$

?

non si può definire probabilità
dal concetto di equiprobabilità

2) $\dfrac{\text{numero delle volte che un evento è accaduto}}{\text{numero di prove indipendenti sotto stesse condiz.}}$

(equiprobabilità)

↓

"$n \to \infty$"

[se il futuro procederà con continuità dal passato]

Chi decide se le clausole sono accettabili per ciascuna applicazione?

Cosa è allora la probabilità?

"Quello che tutti sanno cosa sia, prima di andare a scuola"

⇒ "Quanto credo che qualcosa accada"

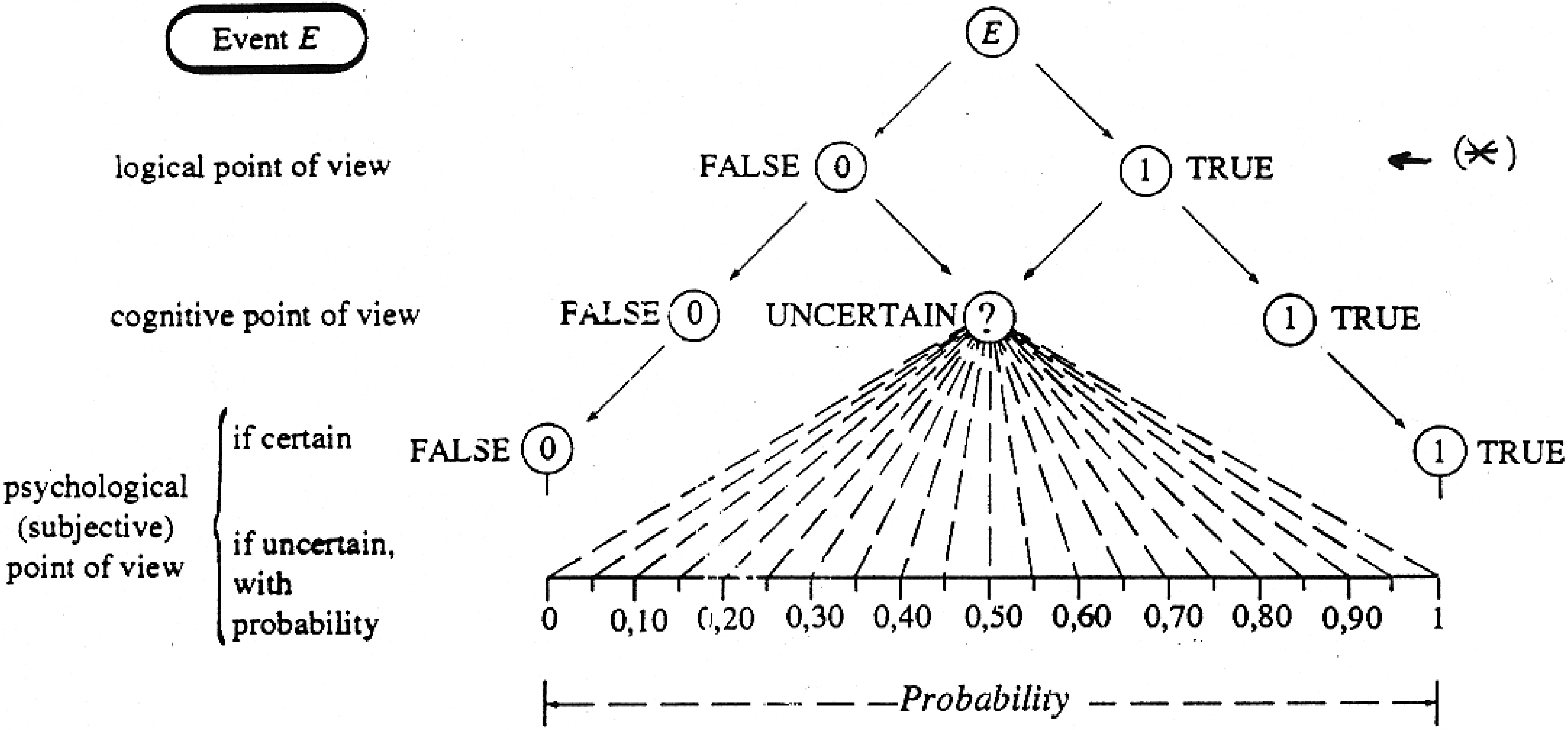
⇒ "Il grado di fiducia che un evento si verifichi"

↳ verificarsi nel senso di "provare essere vero" – L'evento potrebbe essere già accaduto nel passato, ma ciò nonostante siamo in stato di incertezza –

→ es. dadi, lotto 1° ottobre del 1960.

de Finetti (Enciclopedia Einaudi, 1980):

* Att: now also fuzzy!

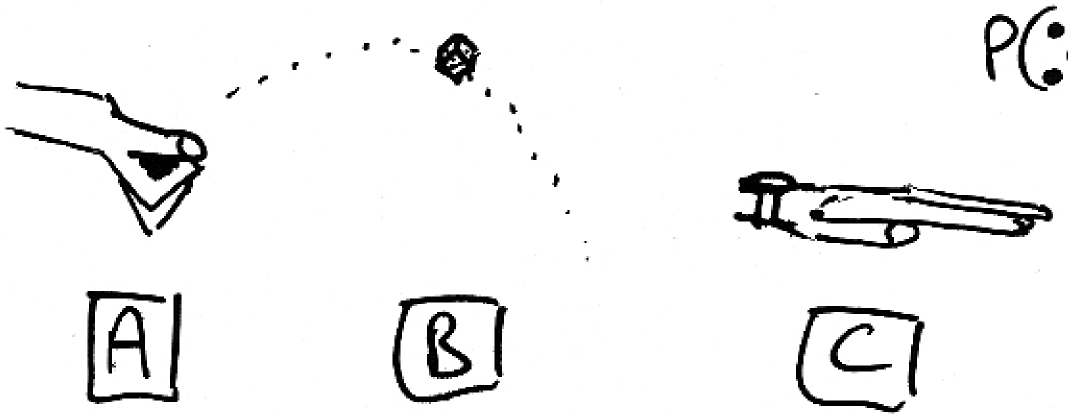


degree of belief

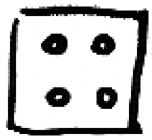
La probabilità è legata
allo stato di incertezza
e non (soltanto)
al risultato di "esperimenti ripetuti" -

Lo stato di informazione
può differire da soggetto a soggetto
(ha una intrinseca natura soggettiva)

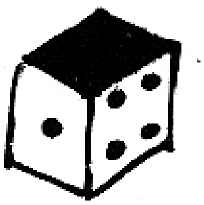
Regular die ("considered such")

1) 

P(⁙)?

2) 

P(⁙)?

3) 

P(⁙)?

P(⁙): $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{5}\right)$

Example: <u>3 card problem</u>

1) Two players, each takes a card

- 1st finds no price
- 2nd offered to change its card with remaining card : ?

⇒ Indifferent (50-50 prob.)

2) One players, takes a card

- Conductor says he can recognize the card with the price and he is going to turn, out of the remaining two cards, a card which has no price
- He does it, and it happens indeed so
- Player is offered to change : ?

⇒ better change : $2/3$ to find price

2a) Recover the previous solution <u>if the result</u> was obtained <u>by chance</u>

2a) 2b) $P(\text{price}) = \frac{2}{3} - P(\text{bluff}) \times \frac{1}{6}$

Va be', ... ma "i numeri"?

Struttura formale

Per poter sviluppare una teoria della probabilità servono delle regole per poter "propagare" le valutazioni fra eventi logicamente connessi:
- regole di base
- logica matematica

Dichiarare valori di probabilità

La struttura formale è una scatola vuota nella quale inserire dei numeri a seconda della situazione

Esiste una regola generalissima? Scommessa

Scommessa coerente

Scommessa

- Più credo che un evento si verifichi, più sono disposto a scommetterci

$P(E) \propto A$ — quota da pagare per
- vincere B se E si verifica
- vincere niente nel caso opp.

$$A \to 0 \quad \Rightarrow \quad P(E) \to 0$$

$$A \to B \quad \Rightarrow \quad P(E) \to \max \to \begin{matrix} 1 \\ 100\% \end{matrix}$$

- Quote di scommessa ("odds"; "picchetto")

$$\frac{P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{A_1}{A_2}$$

se $E_2 = \bar{E}_1 \Rightarrow \dfrac{A_E}{A_{\bar{E}}} = \dfrac{P(E)}{P(\bar{E})} \Rightarrow P(E) = \dfrac{A_E}{A_E + A_{\bar{E}}}$

$$\frac{A_E}{A_{\bar{E}}} = \frac{P(E)}{P(\bar{E})} \Rightarrow P(E) = \frac{A_E}{A_E + A_{\bar{E}}}$$

- Scommessa alla pari $\Longleftrightarrow$ $P(E) = 50\%$

- Domanda a Feynman: "Scommetteresti 100\$ contro 1\$ che la parità non è violata?"
  → "100\$ no, ma 50\$ sì"

- Confidenza di Laplace sulla sua stima della massa di Saturno

"È una scommessa 11.000 a 1 che l'errore non eccede di 1/100 il suo valore"

$$P\left(M - \frac{M}{100} \leq M_V \leq M + \frac{M}{100}\right) = 99.99\%$$

Coerenza

Come obbligare una persona a dichiarare quello che pensa (su quanto ci crede) e non quello che gli fa comodo?

(quanto gli piacerebbe accadesse)

⇒ Tu fissa le quote di scommessa, qualcun altro sceglie in quale direzione giocare

(Come per dividere dei beni, ... o un dolce con un bambino)

Dici che, lanciando una moneta,

$P(\text{Testa}) = 70\%$?

Ok, ci sto: tu scommetti 7€ su testa
io 3€ su croce
e chi vince prende tutto ...

$P(\text{Testa}) = 30\%$? e io punto 3€ su testa ...

Coerenza

↓

Perché ci credi un tot, come hai fatto i conti, se ti sei fatto aiutare da un esperto, etc... sono affari tuoi.

Io voglio soltanto che tu mi dica quanto ci credi dandomi delle quote di scommesse.

Starà a me decidere, eventualmente dopo aver studiato attentamente il problema, aver consultato Google, libri ed esperti, a decidere in quale direzione giocare.

⇒ Puoi solo essere onesto (con te stesso innanzitutto)

⇒ Il fatto che la probabilità sia "giusta" o "errata" non ha senso: "LA PROBABILITÀ NON ESISTE"

Coerenza

- Sembra un concetto vago, ma è un potentissimo strumento operativo

- Questo semplice e naturale principio produce, come teoremi (e non "assiomi"), la base formale della teoria della probabilità:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$ $\quad \Omega =$ "evento certo"
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ $\quad$ se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

   $\cup$: "unione logica"; $\cap$: "prodotto logico"; $\emptyset$: "evento impossibile"

4. $P(E_1 | E_2) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$ $\quad$ se $P(E_2) \neq 0$

   $|$: condizionamento, ⇒ vedi dopo

- La <u>valutazione</u> semplice dei casi favorevoli e possibili <u>ritenuti</u> ugualmente probabili è prontamente recuperata "Definizione di Laplace", ma notare come la postilla di Laplace a

$$\frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}}$$

è inequivocabile

"... lorsque rien ne porte a <u>croire</u> que l'un des cas doit arriver plutot que les autres."

- La <u>valutazione</u> a partire dalle frequenze osservate è <u>recuperabile</u>, ma in modo più formale e, soprattutto, sotto condizioni di validità dichiarate esplicitamente.

La probabilità dipende dallo stato di informazione

→ Ha senso parlare soltanto di probabilità condizionata

$$P(E \mid I)$$

→ Se I cambia $(I(t))$, anche $P(E \mid I(t))$ cambia.

→ Come?

- In molti casi irrazionalmente
  (non facilmente modellizzabile)
- In molti altri (e in quasi tutti quelli scientifici):

$\Rightarrow$ Teorema di Bayes

$$(4.) \qquad P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} \qquad \neq 0$$

- Attenzione: tutte le valutazioni sono condizionate da uno stato generale di informazione I

$$P(H \mid E, I) = \frac{P(H \cap E \mid I)}{P(E \mid I)}$$

- Situazione simmetrica $H \leftrightarrow E$

$$P(E \mid H, I) = \frac{P(H \cap E \mid I)}{P(H \mid I)}$$

$$\Rightarrow P(H \mid E, I) = \frac{P(E \mid H, I) \cdot P(H \mid I)}{P(E \mid I)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(H \mid E, I)}{P(H \mid I)} = \frac{P(E \mid H, I)}{P(E \mid I)} \qquad !$$

Torniamo al nostro problema delle "6 scatole" (buste)

(sottintendiamo I)

$$\underbrace{P(H_j \mid E_i)}_{\text{Dopo l'esperimento}} = \underbrace{\frac{P(E_i \mid H_j) \cdot P(H_j)}{P(E_i)}}_{\text{Prima dell'esperimento}}$$

["post illa observationes"] ["ante illa observationes"]

(Gauss)

Ci servono :
- $P(H_j) \to$ "$P_0(H_j)$"
- $P(E_i \mid H_j)$ "risposta del rivelatore sotto ipotesi H_j"
- $P(E_i)$: <u>idem</u> sotto qualsiasi ipotesi $\{H_j\}$

non confondere

$$P(E_i \mid H_j)$$

White ~~Red~~ ← → Black

$P(E_1 \mid H_0) = 0$ $\qquad$ $P(E_2 \mid H_0) = 1$

$P(E_1 \mid H_1) = 1/5$ $\qquad$ $P(E_2 \mid H_1) = 4/5$

$\cdots\cdots$ $\qquad$ $\cdots\cdots$

$$\boxed{P(E_1 \mid H_j) = j/5 \qquad P(E_2 \mid H_j) = \frac{5-i}{5}}$$

$\cdots\cdots$ $\qquad$ $\cdots\cdots$

$P(E_1 \mid H_5) = 1$ $\qquad$ $P(E_2 \mid H_5) = 0$

Before first observation: what shall we observe?

→ $P(E_1)$?

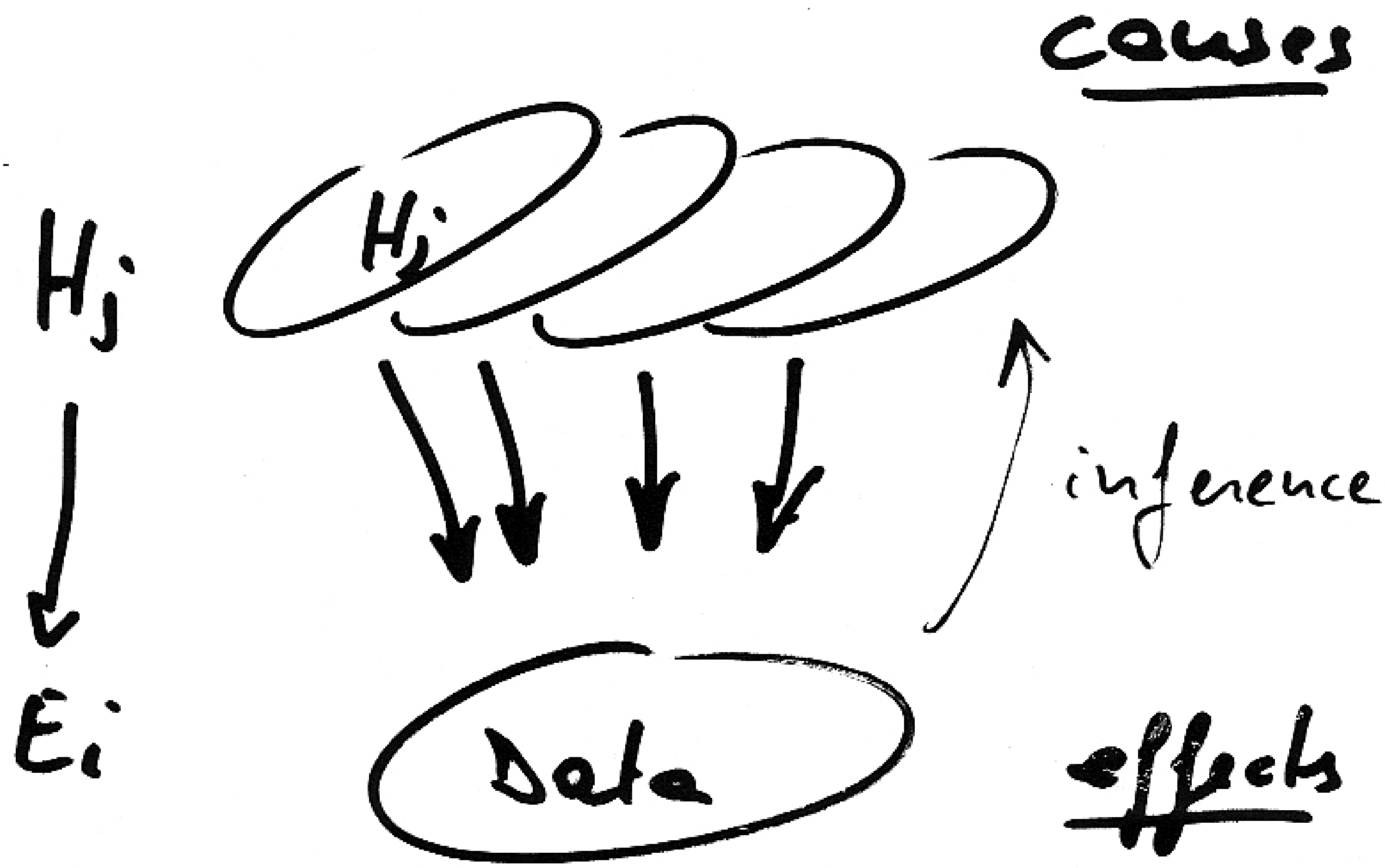
$\frac{1}{2}$ by symmetry

→ let's evaluate it in a general way valid also when the problem might (will!) become asymmetric

$$P(E_1) = \sum_j P(E_1 \cap H_j) = \sum_j \underbrace{P(H_j)}_{\to\ 1/6\ \text{because initial symmetry}} \cdot P(E_1 \mid H_j)$$

$$P(E_1 \mid \text{initial symmetry}) = \overbrace{\frac{1}{6}}^{P_0(H_j)} \times \left(\frac{0+1+2+3+4+5}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{15}{5} = 1/2$$



Inference: $P(H_j \mid \text{data})$

$\vdots$

$P(H_j \mid \text{data}(t))$

Poincaré:

Now, these problems are classified as *probability of causes*, and are the most interesting of all from their scientific applications. I play at *écarté* with a gentleman whom I know to be perfectly honest. What is the chance that he turns up the king? It is $\frac{1}{8}$. This is a problem of the probability of effects. I play with a gentleman whom I do not know. He has dealt ten times, and he has turned the king up six times. What is the chance that he is a sharper? This is a problem in the probability of causes. It may be said that it is the essential problem of the experimental method.

Siamo pronti

Risultato $\boxed{E_1 = \text{"bianco"}}$

$$P(H_j \mid E_1) = \frac{P(E_1 \mid H_j) \cdot P_0(H_j)}{P(E_1)}$$

$P(H_j \mid \text{Information})$

	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	$P(E_1)$
Initial	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0.5
E_1	0	0.07	0.13	0.20	0.27	0.33	0.73
E_1	0	0.02	0.07	0.16	0.29	0.45	0.82

E_1							0.73
E_2	0	0.20	0.30	0.30	0.20	0	0.5

E_2	0.33	0.27	0.20	0.13	0.07	0	0.27
E_2	0.45	0.29	0.16	0.07	0.02	0	0.18

E_2							0.27
E_1	0	0.20	0.30	0.30	0.20	0	0.5

$$P(H_j \mid E_1, E_2) = P(H_j \mid E_2, E_1)$$

La semplice formula

$$P(H_j | E_i) = \frac{P(E_i | H_j) \cdot P_o(H_j)}{P(E_i)}$$

è nota come Teorema di Bayes, meglio conosciuto nella forma in cui $P(E_i)$ è espressa come media pesata delle varie $P(E_i|H_j)$

$$P(E_i) = \sum_j P(E_i | H_j) \cdot P(H_j)$$

$$P(H_j | E_i) = \frac{P(E_i | H_j) \cdot P_o(H_j)}{\sum_j P(E_i | H_j) \cdot P_o(H_j)}$$

Notando come il denominatore serva solo a "normalizzare" la probabilità

$$\boxed{P(H_j | E_i) \propto P(E_i | H_j) \cdot P_o(H_j)}$$

! una semplice formula di grandissimo potenziale !

Ripetiamo l'esperimento

$$P(H_j \mid E^{(1)}, E^{(2)}) \propto P(E^{(2)} \mid H_j) \cdot P(H_j \mid E^{(1)})$$

etc.

$\Rightarrow$ aggiornamento della conoscenza dopo ogni osservazione!

"Statistica bayesiana"

ricordiamo: basata su

- concetto di probabilità soggettiva
- teorema di Bayes [$\leftarrow$ coerenza]

$\Rightarrow \begin{cases} \text{concetto intuitivo di probabilità} \\ + \\ \text{principio di coerenza} \end{cases}$

A 8

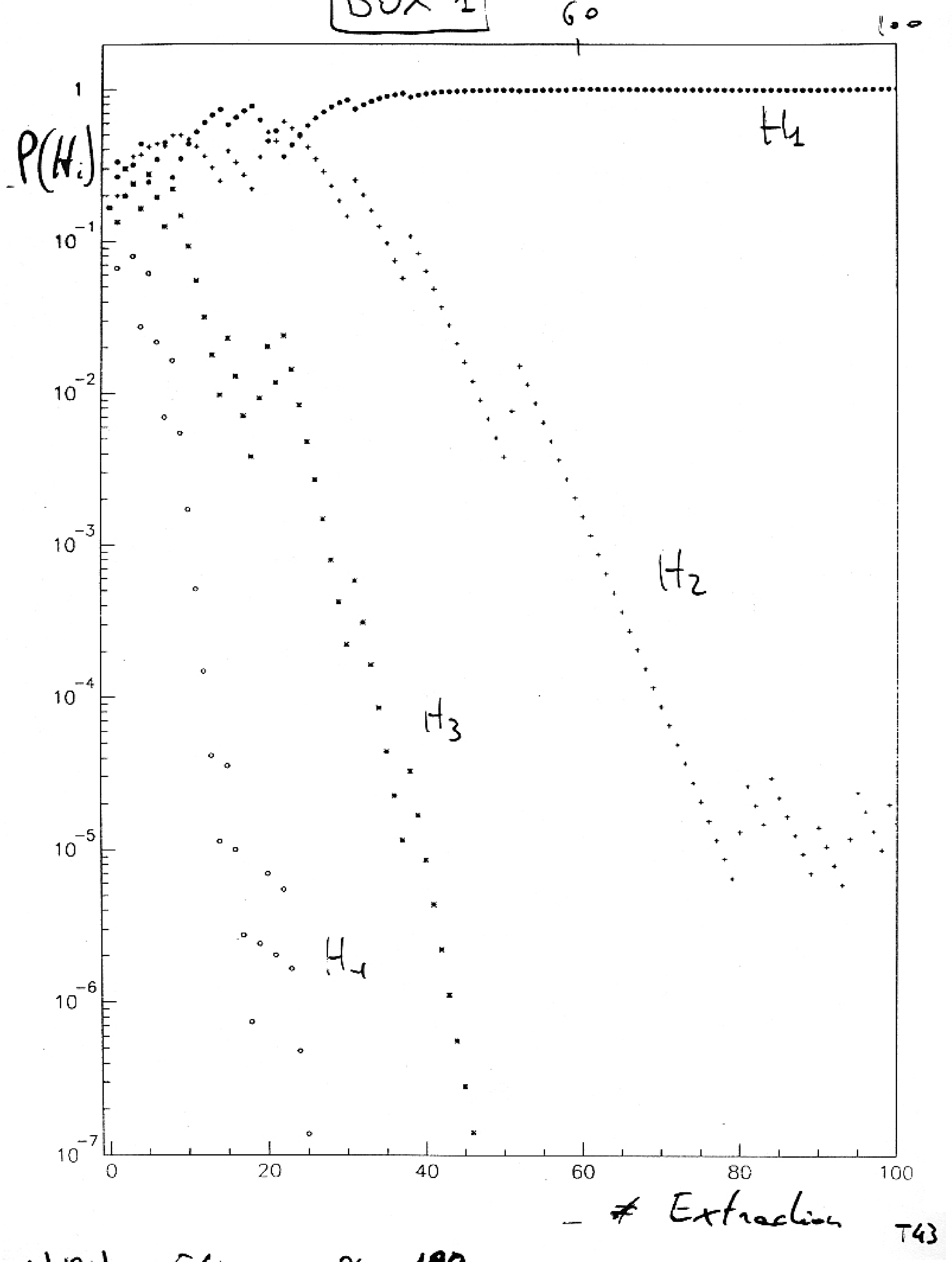
scatola nr. 1
pw = 0.200

			H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
1	0	(0, 1)	0.3333	0.2667	0.2000	0.1333	0.0667	0.0000
R 2	1	(1, 1)	0.0000	0.2000	0.3000	0.3000	0.2000	0.0000
3	0	(1, 2)	0.0000	0.3200	0.3600	0.2400	0.0800	0.0000
4	0	(1, 3)	0.0000	0.4384	0.3699	0.1644	0.0274	0.0000
5	1	(2, 3)	0.0000	0.2462	0.4154	0.2769	0.0615	0.0000
6	0	(2, 4)	0.0000	0.3459	0.4378	0.1946	0.0216	0.0000
7	0	(2, 5)	0.0000	0.4452	0.4226	0.1252	0.0070	0.0000
8	1	(3, 5)	0.0000	0.2628	0.4990	0.2218	0.0164	0.0000
9	0	(3, 6)	0.0000	0.3495	0.4976	0.1474	0.0055	0.0000
10	0	(3, 7)	0.0000	0.4381	0.4678	0.0924	0.0017	0.0000
11	0	(3, 8)	0.0000	0.5243	0.4199	0.0553	0.0005	0.0000
12	0	(3, 9)	0.0000	0.6047	0.3632	0.0319	0.0001	0.0000
13	0	(3,10)	0.0000	0.6771	0.3050	0.0179	0.0000	0.0000
14	0	(3,11)	0.0000	0.7401	0.2501	0.0098	0.0000	0.0000
15	1	(4,11)	0.0000	0.5830	0.3939	0.0231	0.0000	0.0000
16	0	(4,12)	0.0000	0.6550	0.3320	0.0130	0.0000	0.0000
17	0	(4,13)	0.0000	0.7194	0.2735	0.0071	0.0000	0.0000
18	0	(4,14)	0.0000	0.7752	0.2210	0.0038	0.0000	0.0000
19	1	(5,14)	0.0000	0.6309	0.3597	0.0094	0.0000	0.0000
20	1	(6,14)	0.0000	0.4577	0.5219	0.0204	0.0000	0.0000
21	0	(6,15)	0.0000	0.5326	0.4555	0.0118	0.0000	0.0000
22	1	(7,15)	0.0000	0.3601	0.6159	0.0240	0.0000	0.0000
23	0	(7,16)	0.0000	0.4317	0.5539	0.0144	0.0000	0.0000
24	0	(7,17)	0.0000	0.5053	0.4862	0.0084	0.0000	0.0000
25	0	(7,18)	0.0000	0.5780	0.4171	0.0048	0.0000	0.0000
26	0	(7,19)	0.0000	0.6471	0.3502	0.0027	0.0000	0.0000
27	0	(7,20)	0.0000	0.7102	0.2883	0.0015	0.0000	0.0000
28	0	(7,21)	0.0000	0.7660	0.2332	0.0008	0.0000	0.0000
29	0	(7,22)	0.0000	0.8138	0.1858	0.0004	0.0000	0.0000
30	0	(7,23)	0.0000	0.8536	0.1462	0.0002	0.0000	0.0000
31	1	(8,23)	0.0000	0.7445	0.2550	0.0006	0.0000	0.0000
32	0	(8,24)	0.0000	0.7954	0.2043	0.0003	0.0000	0.0000
33	0	(8,25)	0.0000	0.8383	0.1615	0.0002	0.0000	0.0000
34	0	(8,26)	0.0000	0.8737	0.1262	0.0001	0.0000	0.0000
35	0	(8,27)	0.0000	0.9022	0.0978	0.0000	0.0000	0.0000
36	0	(8,28)	0.0000	0.9248	0.0752	0.0000	0.0000	0.0000
37	0	(8,29)	0.0000	0.9425	0.0575	0.0000	0.0000	0.0000
38	1	(9,29)	0.0000	0.8913	0.1087	0.0000	0.0000	0.0000
39	0	(9,30)	0.0000	0.9162	0.0838	0.0000	0.0000	0.0000
40	0	(9,31)	0.0000	0.9358	0.0642	0.0000	0.0000	0.0000
41	0	(9,32)	0.0000	0.9511	0.0489	0.0000	0.0000	0.0000
42	0	(9,33)	0.0000	0.9629	0.0371	0.0000	0.0000	0.0000
43	0	(9,34)	0.0000	0.9719	0.0281	0.0000	0.0000	0.0000
44	0	(9,35)	0.0000	0.9788	0.0212	0.0000	0.0000	0.0000
45	0	(9,36)	0.0000	0.9840	0.0160	0.0000	0.0000	0.0000
46	0	(9,37)	0.0000	0.9879	0.0121	0.0000	0.0000	0.0000
47	0	(9,38)	0.0000	0.9909	0.0091	0.0000	0.0000	0.0000
48	0	(9,39)	0.0000	0.9932	0.0068	0.0000	0.0000	0.0000
49	0	(9,40)	0.0000	0.9949	0.0051	0.0000	0.0000	0.0000
50	0	(9,41)	0.0000	0.9962	0.0038	0.0000	0.0000	0.0000
51	1	(10,41)	0.0000	0.9923	0.0077	0.0000	0.0000	0.0000
52	1	(11,41)	0.0000	0.9848	0.0152	0.0000	0.0000	0.0000
53	0	(11,42)	0.0000	0.9885	0.0115	0.0000	0.0000	0.0000
54	0	(11,43)	0.0000	0.9914	0.0086	0.0000	0.0000	0.0000
55	0	(11,44)	0.0000	0.9935	0.0065	0.0000	0.0000	0.0000
56	0	(11,45)	0.0000	0.9951	0.0049	0.0000	0.0000	0.0000
57	0	(11,46)	0.0000	0.9963	0.0037	0.0000	0.0000	0.0000
58	0	(11,47)	0.0000	0.9973	0.0027	0.0000	0.0000	0.0000
59	0	(11,48)	0.0000	0.9979	0.0021	0.0000	0.0000	0.0000
60	0	(11,49)	0.0000	0.9985	0.0015	0.0000	0.0000	0.0000
61	0	(11,50)	0.0000	0.9988	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000
62	0	(11,51)	0.0000	0.9991	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000
63	0	(11,52)	0.0000	0.9993	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000
64	0	(11,53)	0.0000	0.9995	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
65	0	(11,54)	0.0000	0.9996	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
			H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5

(189) _QR_ T42

(A)

BOX 1



60
100
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0
20
40
60
80
100
P(H_i)
H_1
H_2
H_3
H_4
Extraction
T43

Test dell' AIDS $\Rightarrow$ lasciato come esercizio (soluzione sul sito web)

Noi pensiamo in "modo bayesiano"!

Example 1 : guessing who is phoning.

Listening a friend / colleague phoning.
$\Rightarrow$ who is "X"?

Answer depends on : - Knowledge of the friend/colleague
- Knowledge of X_i
- Status of information during the phone call.

$\Downarrow$

Subject of conversation
Tone of voice
Hour and place of call
⋮

$$P(X_i \mid I(t), I_0) \propto P(I(t) \mid X_i, I_0) \cdot P(X_i \mid I_0)$$

$$\sum_i P(X_i) = 1$$

Example 2 : Has your old friend become a cheat?

- X meets F at a bar.
- F invites X to a game: whichever of the two extracts a card of lower value from a pack has to pay the drink.
- F wins.
- After a few days same story: F wins again
- The story goes on several times

⇒ what is the probability that F is cheating?

$$P(C|W_n) = \frac{P(W_n|C)\cdot P_0(C)}{P(W_n|C)\,P_0(C) + P(W_n|H)\cdot P_0(H)}$$

$P(W_n|H) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(W_n|C) = 1$ (for simplicity)

$P_0(C)$? $\longrightarrow$

$P_0(H) = 1 - P_0(C)$

X

$$P(C|W_n) = \frac{P(W_n|C) \cdot P_\circ(C)}{P(W_n|C) \cdot P_\circ(C) + P(W_n|H) \cdot P_\circ(H)}$$
$$= \frac{1 \cdot P_\circ(C)}{1 \cdot P_\circ(C) + \underline{2^{-n}} \cdot P_\circ(H)}$$

$P(C|W_n) = f(P(C|W_{n-1}))$

X

$$P(C|W_n) = \frac{P(W|C) \cdot P(C|W_{n-1})}{P(W|C) \cdot P(C|W_{n-1}) + P(W|H) \cdot P(H|W_{n-1})}$$
$$= \frac{1 \cdot P(C|W_{n-1})}{1 \cdot P(C|W_{n-1}) + \frac{1}{2} P(H|W_{n-1})},$$

shows better the updating

$P_\circ(C) = 5\%$

n	$P(C\|W_n)$ (%)	$P(H\|W_n)$ (%)
0	5.0	95.0
1	9.5	90.5
2	17.4	82.6
3	29.4	70.6
4	45.7	54.3
5	62.7	37.3
6	77.1	22.9
...	...	...

Dependence on $P_\circ(C)$:

$P_\circ(C)$	$P(C\|W_n)$ (%)			
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
1 %	24	91	99.7	99.99
5 %	63	98	99.94	99.998
50 %	97	99.90	99.997	99.9999

Is the old friend a cheat?

$\rightarrow$ A probabilistic theory cannot arrive to certainties!

$\Rightarrow$ Degrees of belief

$\Rightarrow$ **Decision** on **next** action is up to **YOU**

$\swarrow$ take your responsability!

?

$\rightarrow$ **Accept** to play **next** game
with probability $P(C\,|\,W_n)$
to loose with certainty

$\rightarrow$ **Refuse** to play further,
with probability $P(H\,|\,W_n)$
to offend the innocent friend

$\Rightarrow$ if $P_0(C)=0 \rightarrow P(C\,|\,W_n)=0 \quad \forall n$!

"A rare event is not impossible"

Remark:

"Recovering" "Popper":

$$P(H \mid Data) \sim P(Data \mid H) \cdot P_0(H)$$

→ A Theory is killed if $P(Data \mid H) = 0$

$\boxed{\text{But}}$ $P(H \mid Data) = 1$ only if $\begin{cases} P_0(H) = 1 \\ P(Data \mid H) \neq 0 \end{cases}$

⇒ a theory can falsified, but never proven to be true, until other theories are conceivable!

But the Bayesian scheme is superior to the falsification scheme and closer to the historical development of Science

- Falsification scheme: all (infinite!) not-falsified theories are on the same level
- Probabilistic inference: theories are classified (or relative classified) according to degree of belief. Physicist don't wait for Uncertainties before next step!

Teoria degli errori (e delle incertezze) di misura:

$$H_j \longrightarrow \mu$$

$$E_i \longrightarrow x$$

e il gioco è fatto:

$$f(\mu \mid x) \propto f(x \mid \mu) \cdot f_\circ(\mu)$$

Errori sistematici?

"banale"

$$f(\mu|x) \longrightarrow f(\mu|x,\vec{h})$$

+ incertezza su $\vec{h}$: $f(\vec{h})$

+ regole della probabilità:

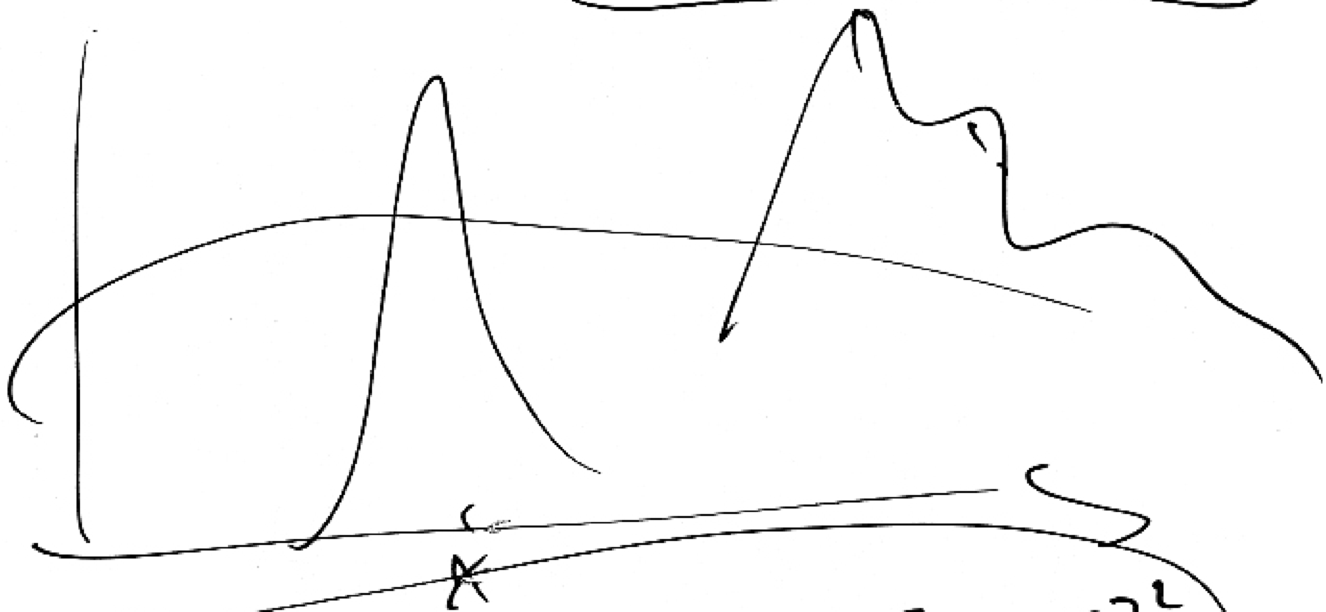
e otteniamo la regola generale

$$f(\mu|x) = \int f(\mu|x,\vec{h}) \cdot f(\vec{h})\, d\vec{h} ,$$

dalla quale è possibile derivare formule approssimative per le semplici applicazioni di laboratorio.

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\mu|x) = \frac{(\qquad)\cdot f_0(\mu)}{\int (\qquad) f_0(\mu)\, d\mu}$$



$$f(\mu|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\mu = x \pm \sigma}$$

Conclusioni

- Il riscoperto concetto della probabilità soggettiva offre un quadro teorico e applicativi decisamente superiore ai metodi statistici convenzionali

- Grande diffusione negli ultimi decenni (personalmente, ho imparato il teorema di Bayes nel '93):
  Interrogate Google ← che usa metodi bayesiani
  su: Bayes, Bayesian
  "Bayesian network"
  "belief network"

- Si scontra ancora con inerzia intellettuale e/o "ignoranza" di molti docenti e ricercatori che seguitano ad usare metodi ad hoc standard, mezze divisioni, errori massimi, retta di massima e minima pendenza etc.

zeus.roma1.infn.it/~agostini/teaching.html

) "Probabilità e incertezza di misura; rassegna critica e proposte per l'insegnamento"

:) Articolo per American Journal of Physics